

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA**

**Corso di**

**FONDAMENTI DI TECNICA DELLE COSTRUZIONI**

**IL TAGLIO NELLE SEZIONI IN C.A.  
ANALISI ELASTICA E STATO LIMITE ULTIMO**



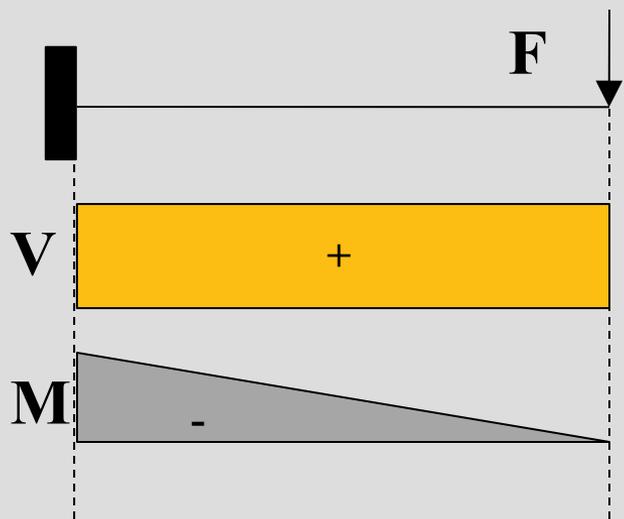
**Docente: Prof. Ing. Angelo MASI**

**Collaboratori: Ing. Giuseppe SANTARSIERO**

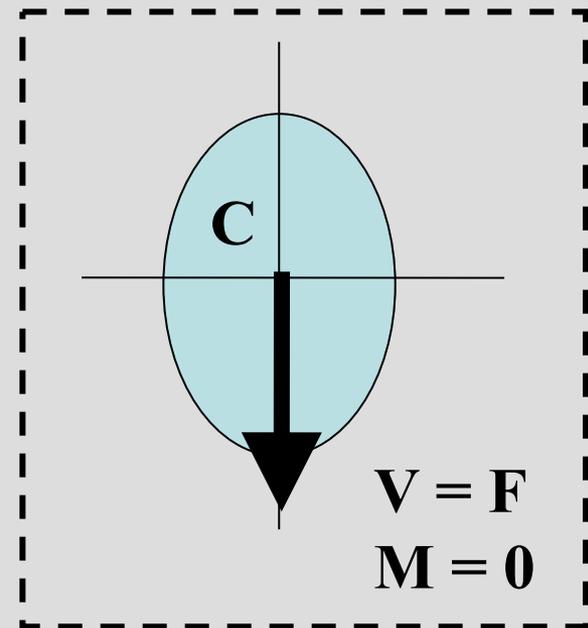
**Ing. Vincenzo MANFREDI**

# Le sollecitazioni di taglio. Generalità

Una sezione di un solido risulta sollecitata a solo sforzo di **taglio V** se, in assenza di momento flettente, la risultante delle azioni esterne **F** appartiene al piano della sezione e passa per un punto caratteristico **C** detto **CENTRO DI TAGLIO**



Sezione in cui è applicata **F**

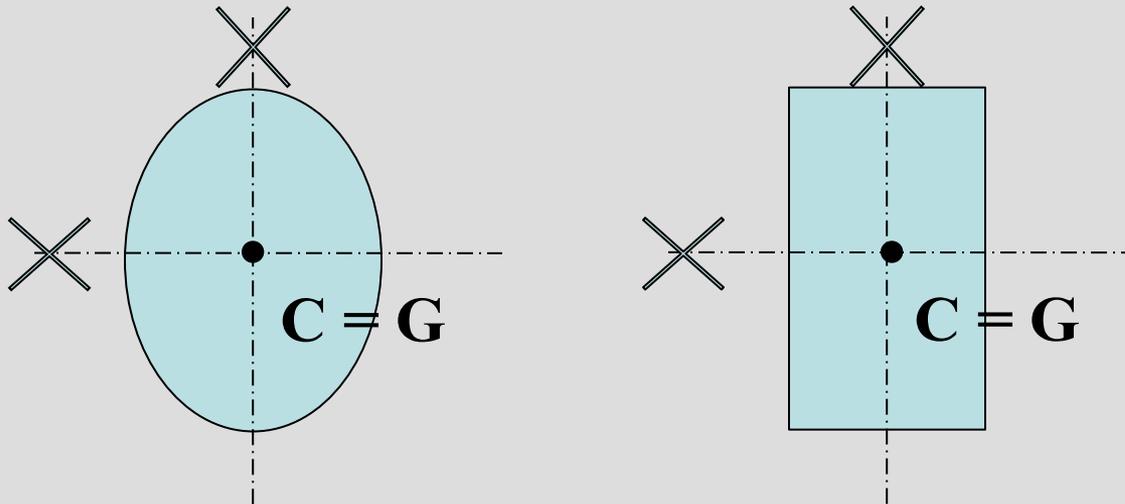


# Le sollecitazioni di taglio. Generalità

---

## Posizione del **CENTRO DI TAGLIO**

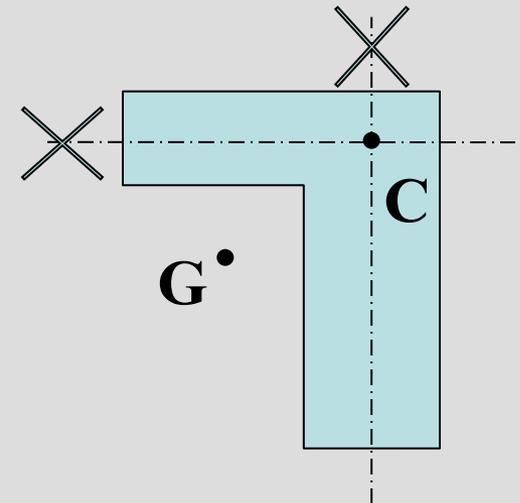
**Regola 1:** se una sezione è dotata di due assi di simmetria il loro punto di incontro è sia il baricentro geometrico **G** che il **Centro di Taglio C**



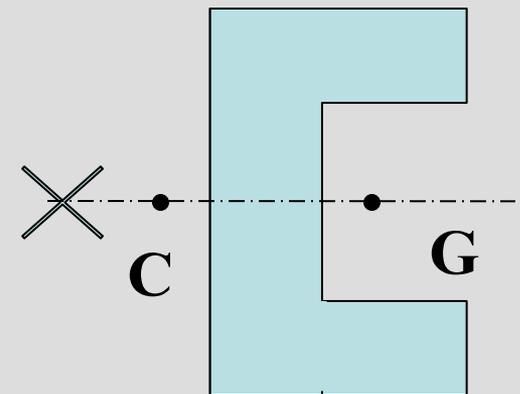
# Le sollecitazioni di taglio. Generalità

## Posizione del **CENTRO DI TAGLIO**

**Regola 2:** in una sezione se esiste un unico punto in cui si incontrano le linee medie dei diversi tratti in cui la sezione può essere suddivisa, tale punto è il **Centro di Taglio** (che non coincide con G)



**Regola 3:** se una sezione ha un solo asse di simmetria su di esso si trovano sia il baricentro che il **Centro di Taglio** (che non coincide con G)

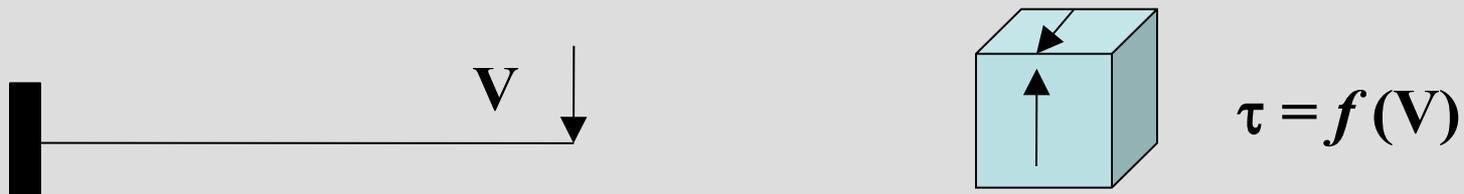


# Le tensioni tangenziali

Alle sollecitazioni sforzo normale  $N$  e momento flettente  $M$  si associano tensioni normali, cioè che agiscono perpendicolarmente al piano cui sono applicate.



Alla sollecitazione tagliante  $V$  si associano tensioni tangenziali, cioè che agiscono parallelamente al piano cui sono applicate.



**Ai fini delle verifiche di sicurezza delle sezioni in c.a. gli effetti di  $V$  e di  $(M + N)$  si valutano separatamente**

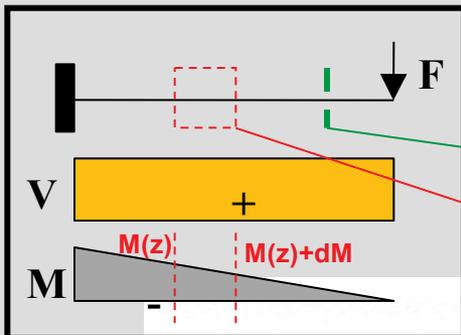
# Le tensioni tangenziali

Le tensioni tangenziali possono essere determinate a partire dall'equilibrio alla traslazione lungo l'asse delle trave delle forze agenti sul concio elementare di lunghezza  $dz$ .

$$\int_{A_c} \sigma_z dA - \int_{A_c} (\sigma_z + d\sigma_z) dA + \tau_{yz} b dz = 0$$

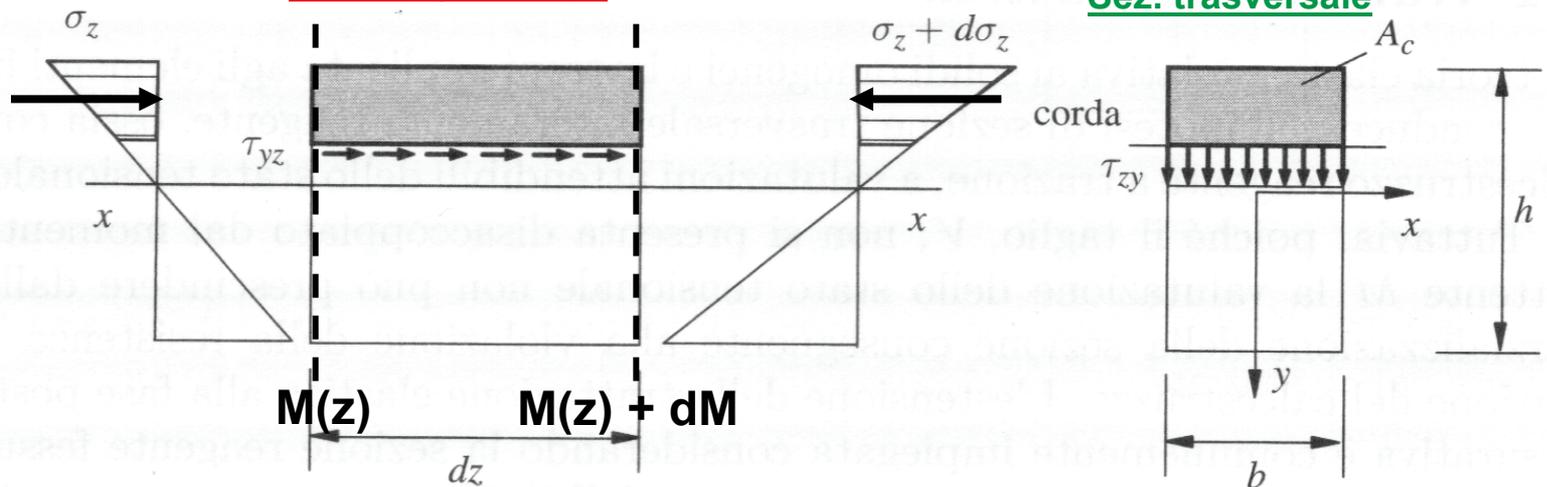


$$\int_{A_c} d\sigma_z dA = \tau_{yz} b dz$$



**Sez. longitudinale**

**Sez. trasversale**



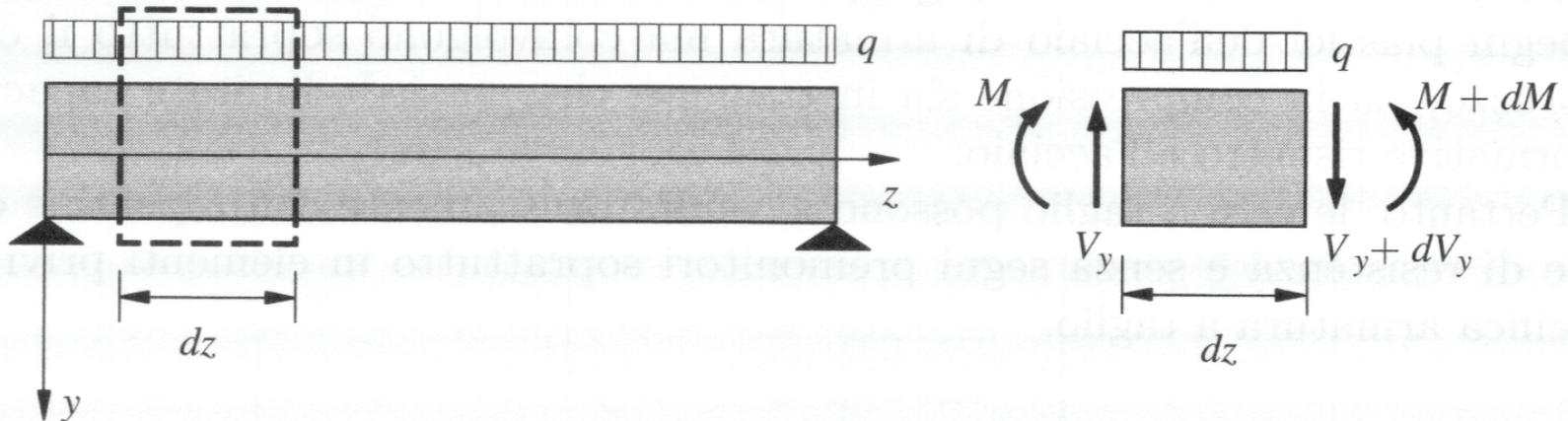
# Le tensioni tangenziali

Dalla formula di Navier le tensioni normali  $\sigma_z$  possono essere scritte come:

$$d\sigma_z = \frac{dM}{I_x} y$$

ed inoltre dall'equilibrio alla rotazione del concio elementare:

$$dM = V_y dz$$

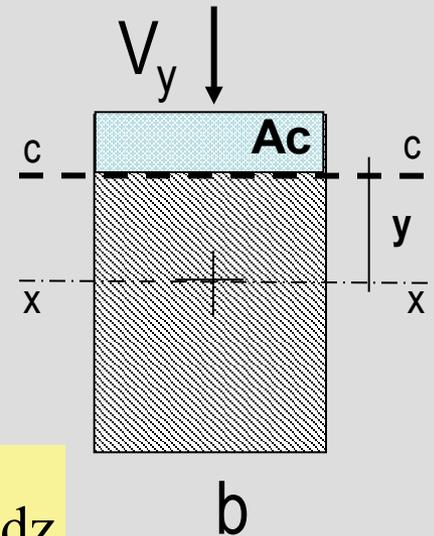


# Le tensioni tangenziali. L'espressione di Jourawski

Le tensioni tangenziali  $\tau_{yz}$ , ipotizzando un valore costante lungo la corda C-C (a distanza  $y$  dall'asse baricentrico x-x), sono valutate attraverso:

$$dM = V_y dz$$

$$d\sigma_z = \frac{dM}{I_x} y \rightarrow d\sigma_z = \frac{V_y dz}{I_x} y$$



Ricordando che:

$$\int_{Ac} d\sigma_z dA = \tau_{yz} b dz \rightarrow \int_{Ac} \frac{V_y dz}{I_x} y dA = \tau_{yz} b dz$$

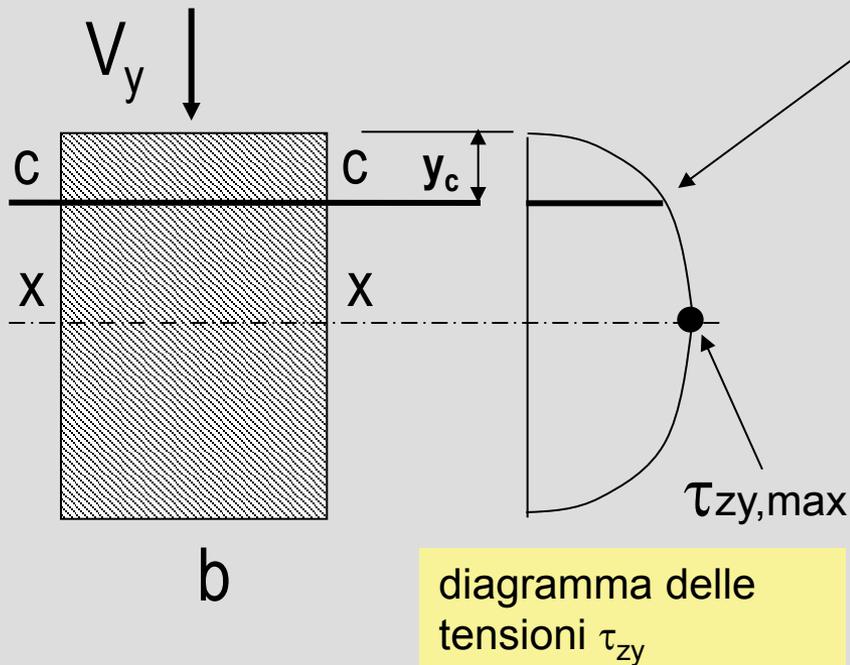
$S_x$  è il momento statico, rispetto all'asse baricentrico x-x, della parte di sezione reagente  $Ac$  al di sopra della corda c-c

$I_x$  è il momento di inerzia della sezione reagente rispetto all'asse baricentrico x-x

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{V_y}{I_x b} \int_{Ac} y dA = \frac{V_y S_x}{I_x b}$$

# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

## Distribuzioni delle tensioni tangenziali in una sezione omogenea interamente reagente



$$\tau_{zy} = \frac{V_y}{I_x} \frac{S_x}{b} = k S_x \quad (f(y_c^2))$$

(§)

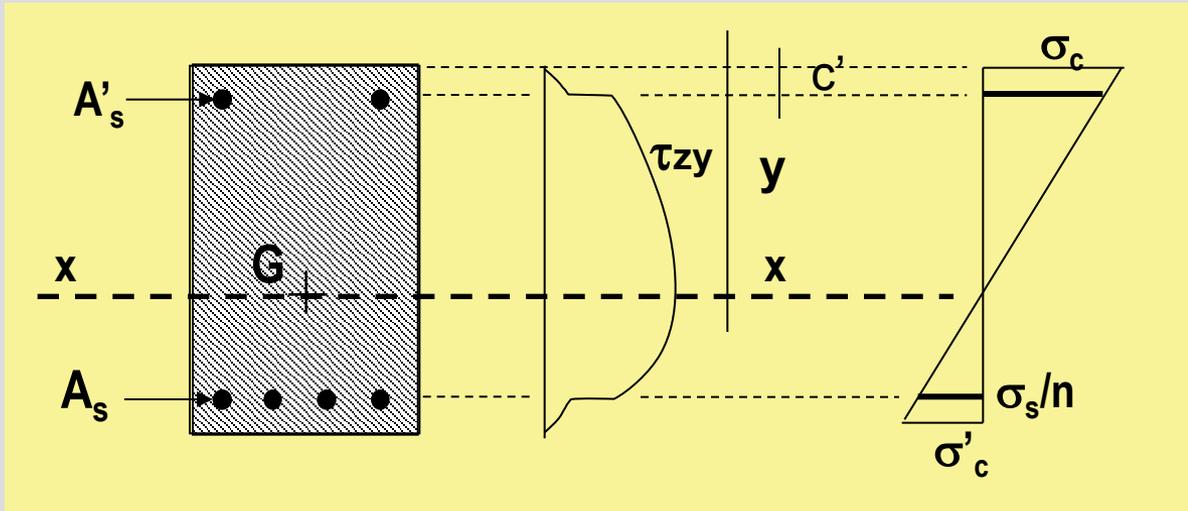
$I_x$  è il momento di inerzia della sezione reagente rispetto al suo asse baricentrico x-x

$S_x$  è il momento statico della parte di sezione reagente al di sopra (o al di sotto) della corda c – c che si considera

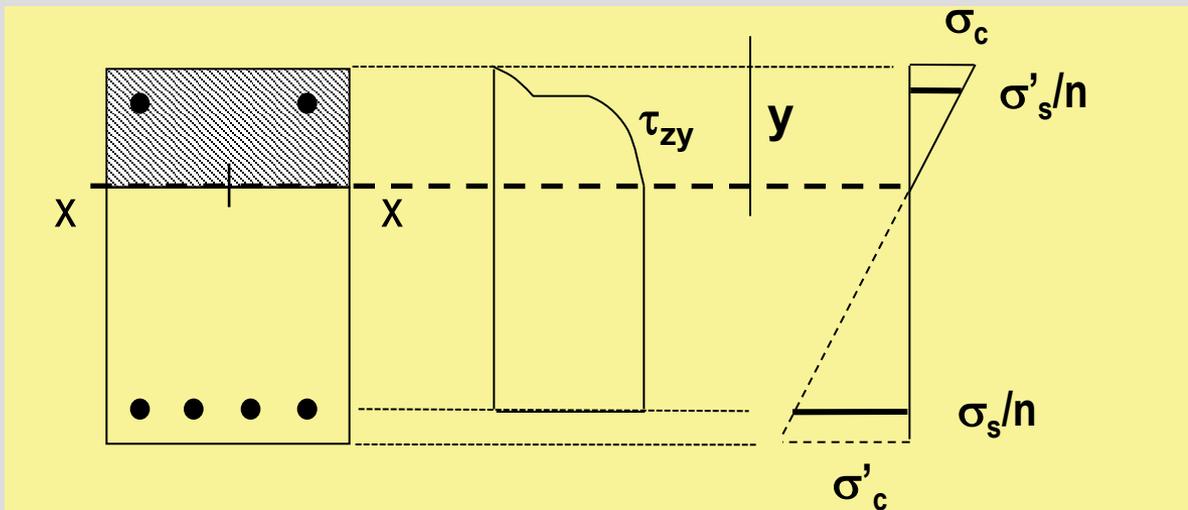
(§) Nelle sezioni rettangolari  $b$  è costante rispetto a  $y_c \rightarrow$  Le tensioni tangenziali  $\tau_{zy}$  hanno un andamento parabolico

# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

Per le sezioni in c.a. bisogna distinguere:



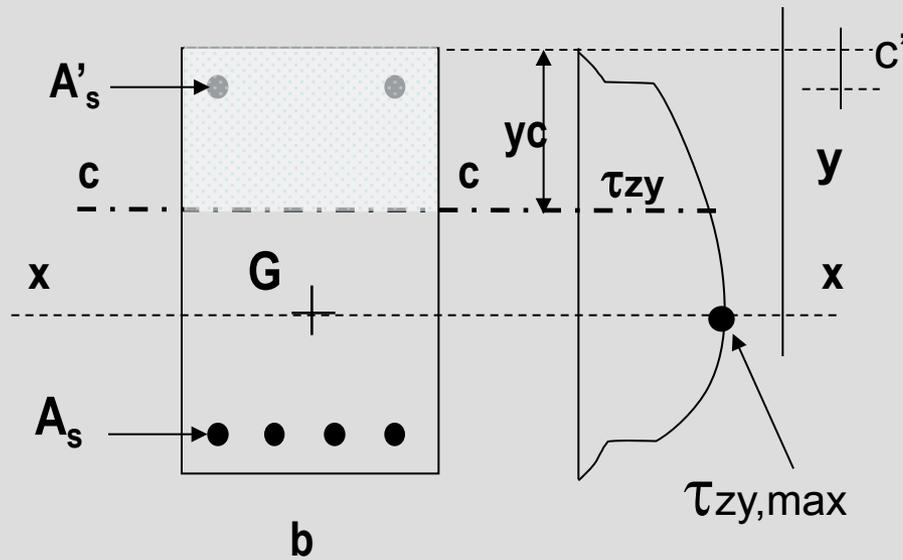
1) sezione interamente reagente (non parzializzata)



2) sezione parzializzata (CLS non reagente a trazione)

# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

Distribuzioni delle tensioni tangenziali in sezione rettangolari in c.a. reagente sia a compressione che a trazione (non fessurato)



$$\tau_{zy} = \frac{V_y \cdot S_x}{I_x \cdot b} = k \cdot S_x (f(y_c^2))$$

$S_x$  è il momento statico rispetto all'asse baricentrico x-x della sezione reagente di una delle parti della sezione separate dalla corda stessa:

$$S_x(y_c) = b y_c (y - y_c/2) + n A'_s (y - c')$$

$I_x$  è il momento di inerzia baricentrico dell'intera sezione, incluso il CLS teso (non fessurato)

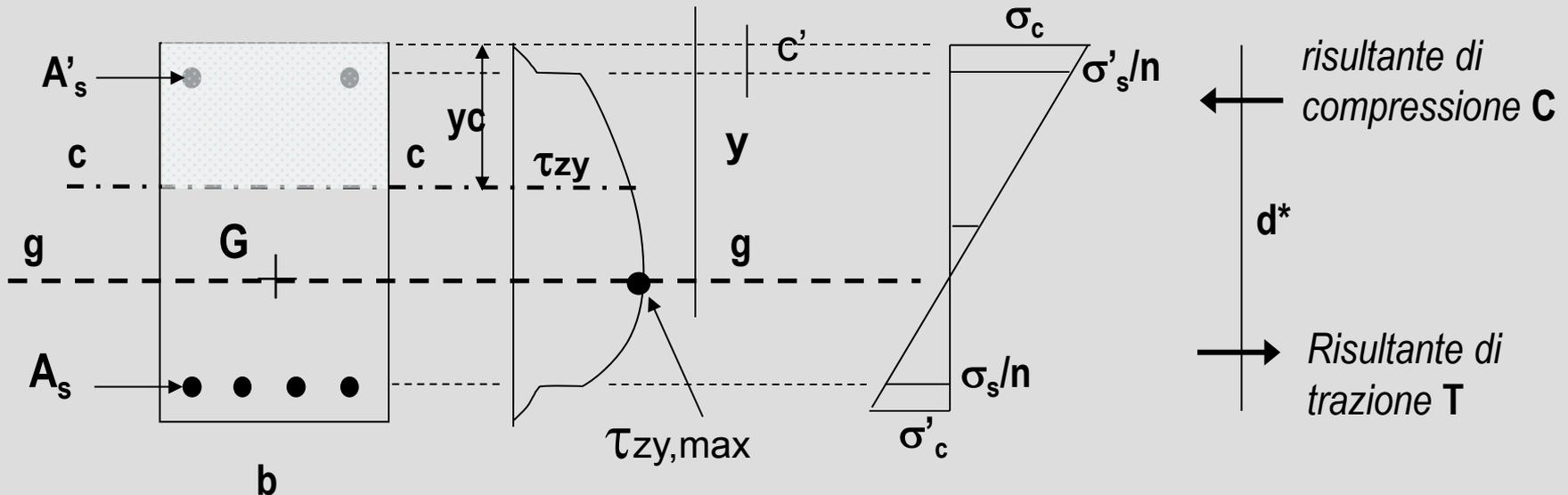
# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

In corrispondenza della corda baricentrica g-g le tensioni  $\tau_{zy}$  assumono il valore max pari a:

$$\tau_{\max} = \frac{V_y \cdot S_x^*}{I_x \cdot b} = \frac{V}{d^* b}$$

dove  $d^*$  è il braccio della coppia interna (forze C e T, con  $C=T$ )

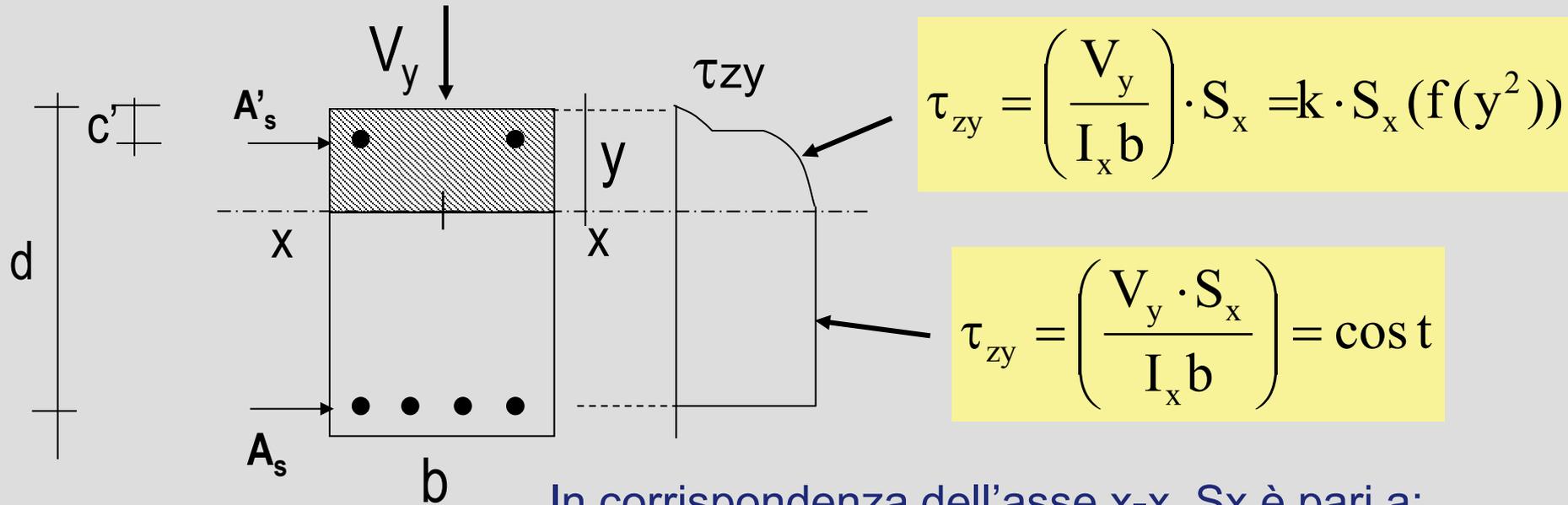
$$d^* = \frac{I_x}{S_x^*}$$



# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

## Distribuzioni delle tensioni tangenziali per sezione rettangolari in c.a. parzializzate

Nella distribuzione delle tensioni tangenziali si riconosce un **andamento parabolico** (in corrispondenza del cls compresso) e un **tratto costante** (in corrispondenza del cls teso non reagente:  $\Delta S_x = 0$ )



In corrispondenza dell'asse  $x$ - $x$ ,  $S_x$  è pari a:

$$S_x = b \cdot y \cdot y / 2 + n \cdot A'_s \cdot (y - c') = n \cdot A_s (d - y)$$

# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

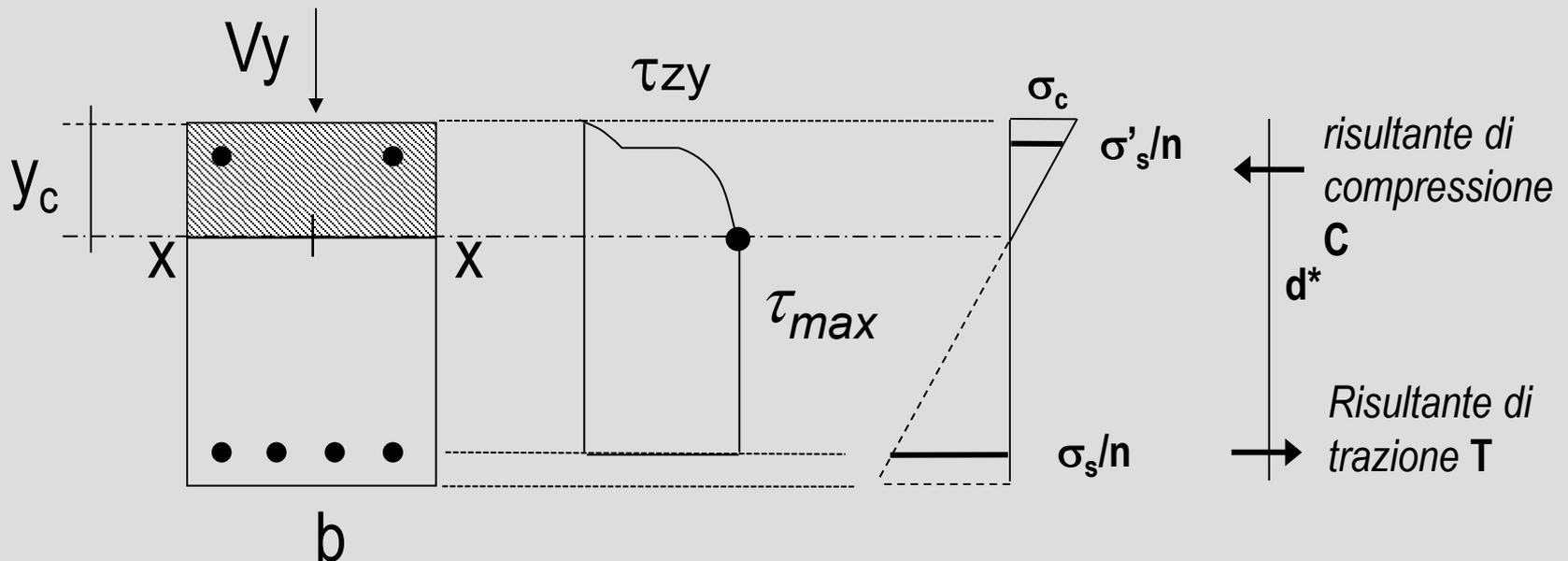
In corrispondenza della corda baricentrica si ha la tensione tangenziale massima  $\tau_{max}$ :

$$\tau_{max} = \frac{V_y}{b \cdot d^*}$$

dove:

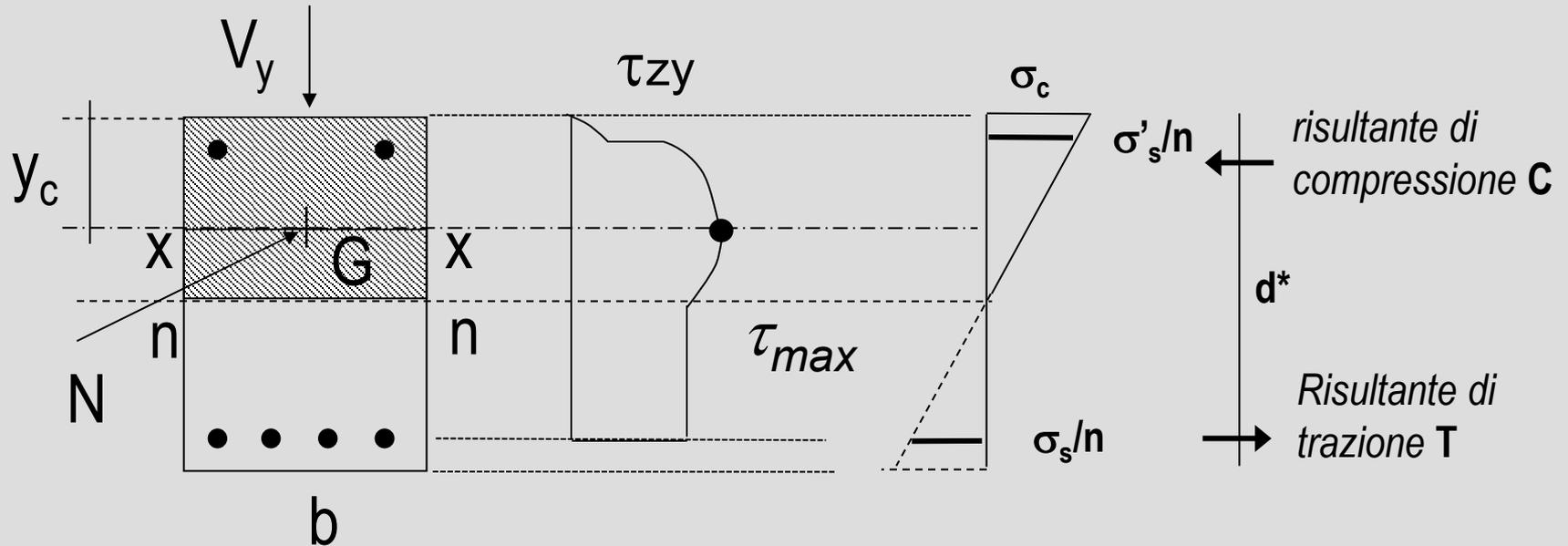
$$d^* = \frac{I_x}{S_x^*}$$

è il braccio della coppia interna



# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

L'asse baricentrico x-x è anche asse neutro n-n per le sezioni inflesse.  
**Nel caso di presso-flessione l'asse neutro non è asse baricentrico.**



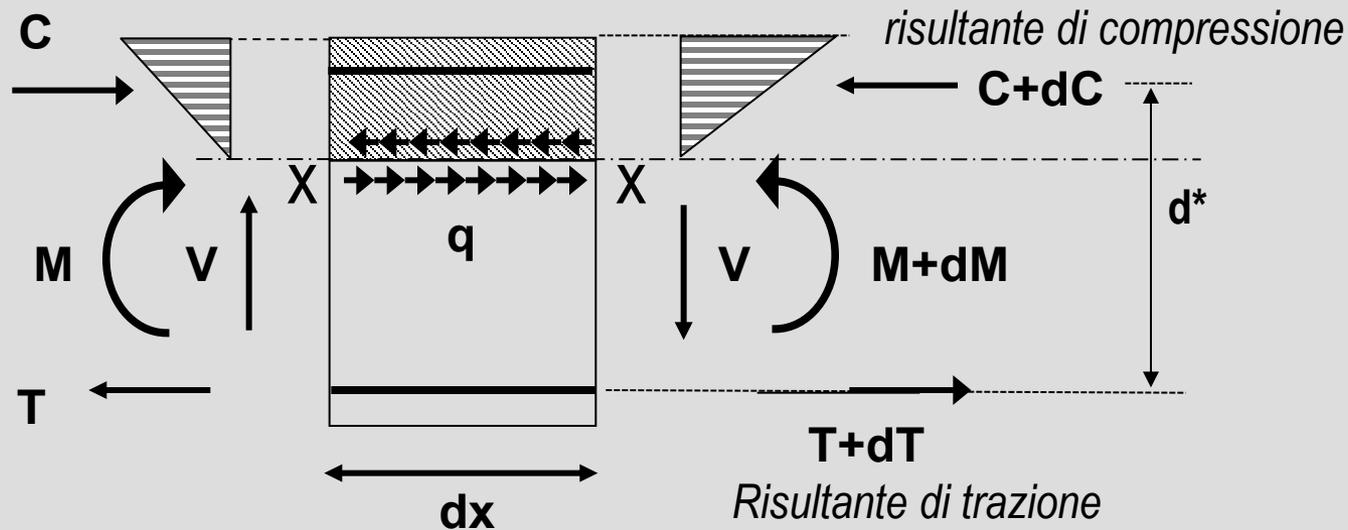
Le tensioni tangenziali massime sono valutate in corrispondenza dell'asse baricentrico x-x

$$\tau_{max} = \frac{V_y}{b \cdot d^*}$$

# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

Si consideri un concio di trave di lunghezza  $dx$  soggetto al momento  $M$  ed al taglio  $V$ . Tra le grandezze indicate vale la relazione:

$$V_y = \frac{dM}{dx}$$



Considerando la parte di concio in corrispondenza dell'asse baricentrico, si può scrivere la seguente relazione di equilibrio:

$$qdx = dC = dT = \frac{dM}{d^*} = \frac{V_y}{d^*} dx$$

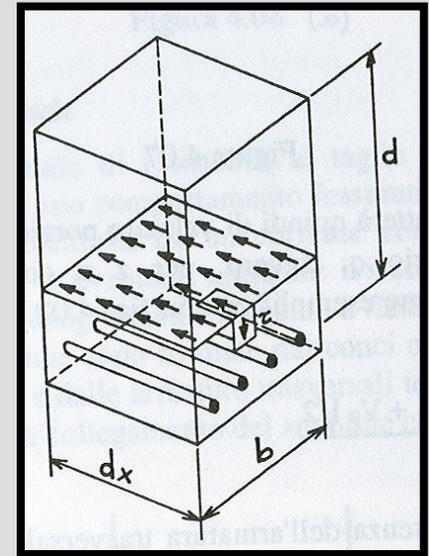
# Le sollecitazioni di taglio. Generalità

La grandezza  $q$  è definita *forza di scorrimento unitaria*. Essa può anche essere vista come risultante delle tensioni tangenziali  $\tau$  sulla superficie orizzontale:

$$q dx = \tau \cdot b \cdot dx = \frac{V_y S_x}{I_x b} b dx \longrightarrow q = \frac{V_y S_x}{I_x}$$

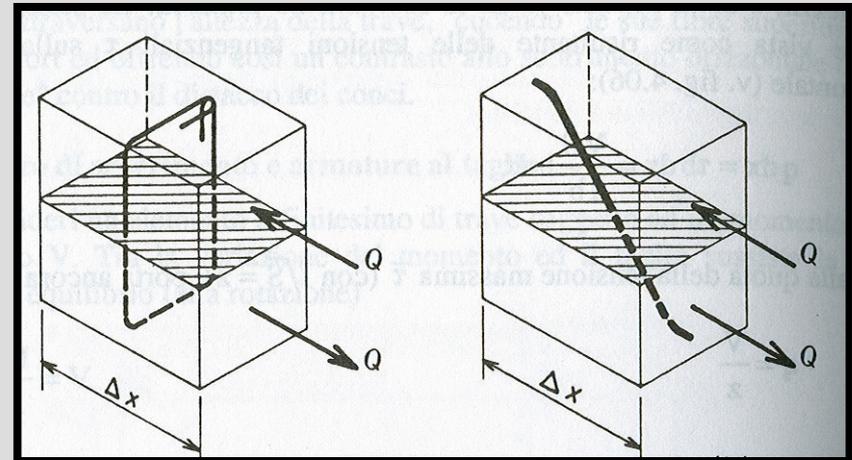
In corrispondenza della tensione massima  $\tau_{\max}$  si ha che:

$$q = \frac{V}{d^*}$$



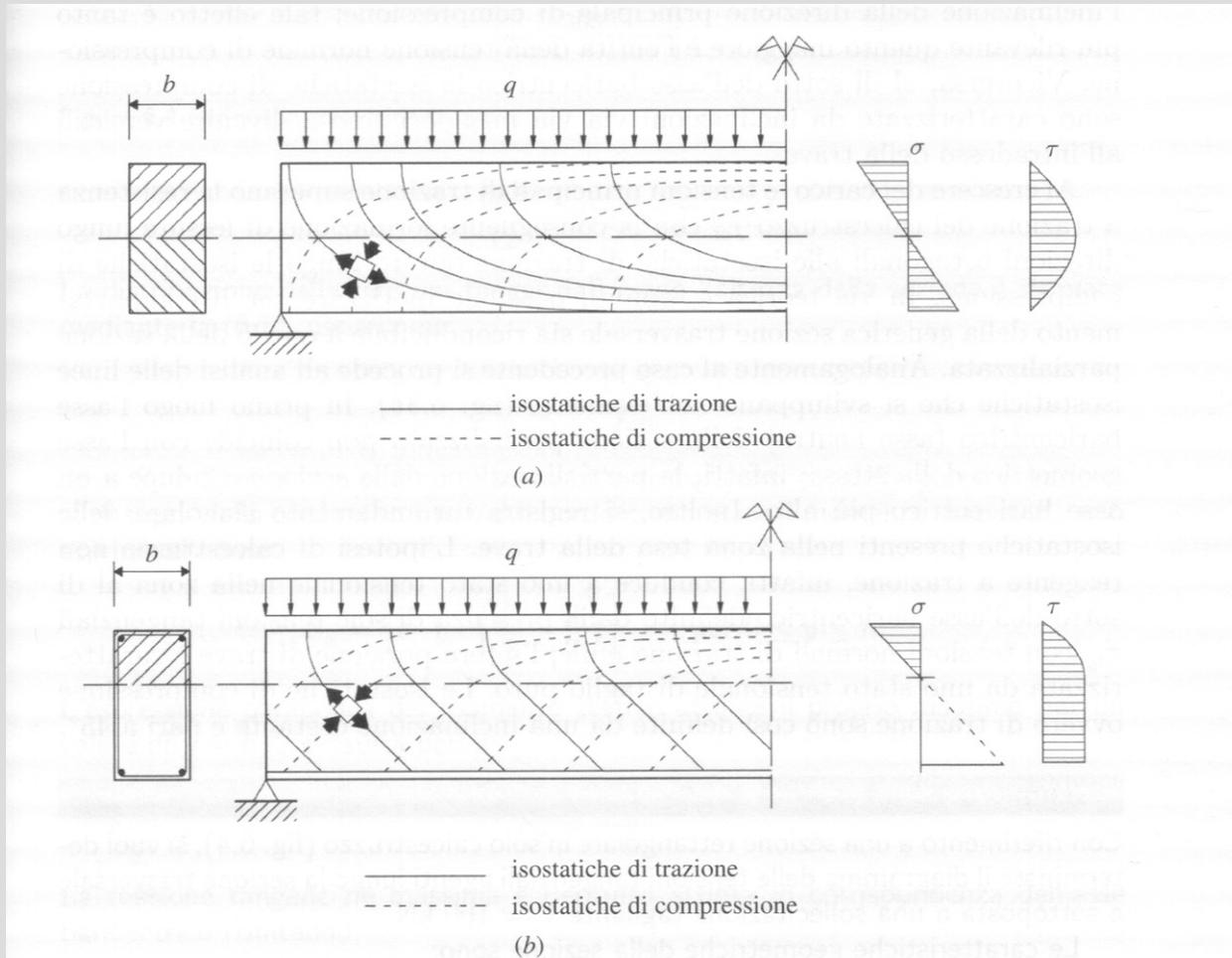
Per resistere agli sforzi di taglio vengono disposte apposite armature trasversali. Poiché tali armature a taglio vengono distribuite con un certo passo  $\Delta x$  ognuna di esse porta una quota parte di forza di scorrimento  $Q$ , pari a:

$$Q = \int_x^{x+\Delta x} q dx = \int_x^{x+\Delta x} \frac{V}{d^*} dx$$



# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

Isostatiche di compressione e di trazione di una trave inflessa sottoposta a un carico uniformemente distribuito nel caso di sezione omogenea interamente reagente (a) e parzializzata (b)



(a)

(b)

# Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

---

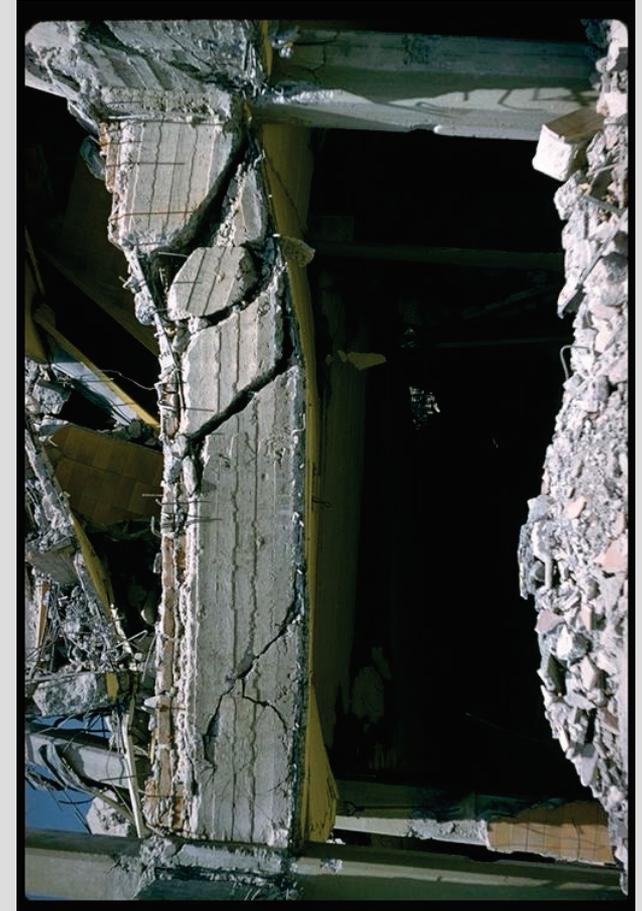
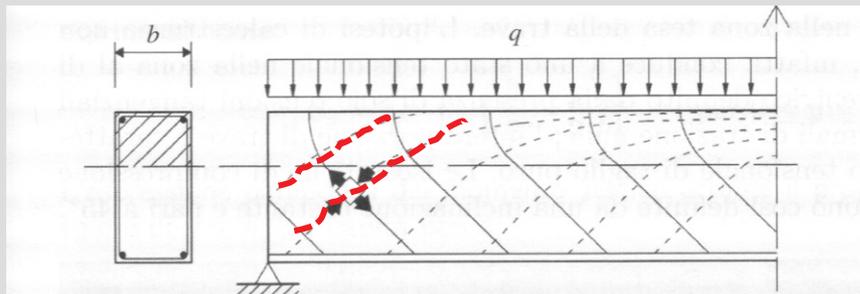
L'esame dello STATO LIMITE ULTIMO di un elemento in c.a. soggetto a TAGLIO va effettuato tenendo conto che la rottura per taglio è in realtà una rottura combinata per flessione e taglio - e spesso anche per sforzo normale e torsione - la cui esatta valutazione è particolarmente complessa.

Tale tipo di rottura è particolarmente pericolosa poiché **determina un rapido DEGRADO dell'elemento strutturale riducendone considerevolmente le capacità duttili e provocando rotture repentine con spiccate caratteristiche di FRAGILITÀ**

# Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

Esempi di collasso di elementi in c.a. per taglio

## TRAVE

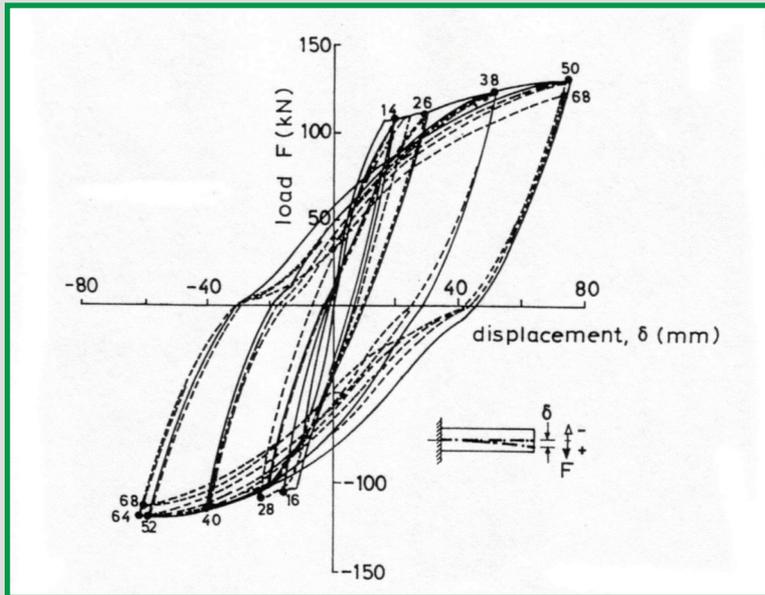
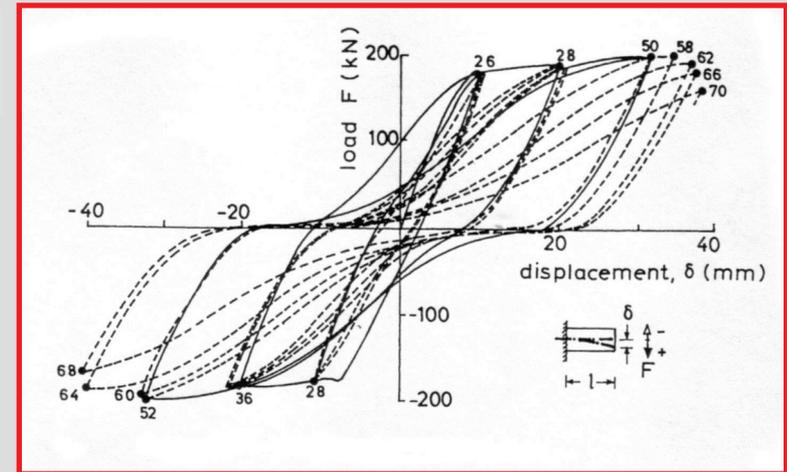


## PILASTRO

# Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

## Comportamento ciclico delle travi in c.a.

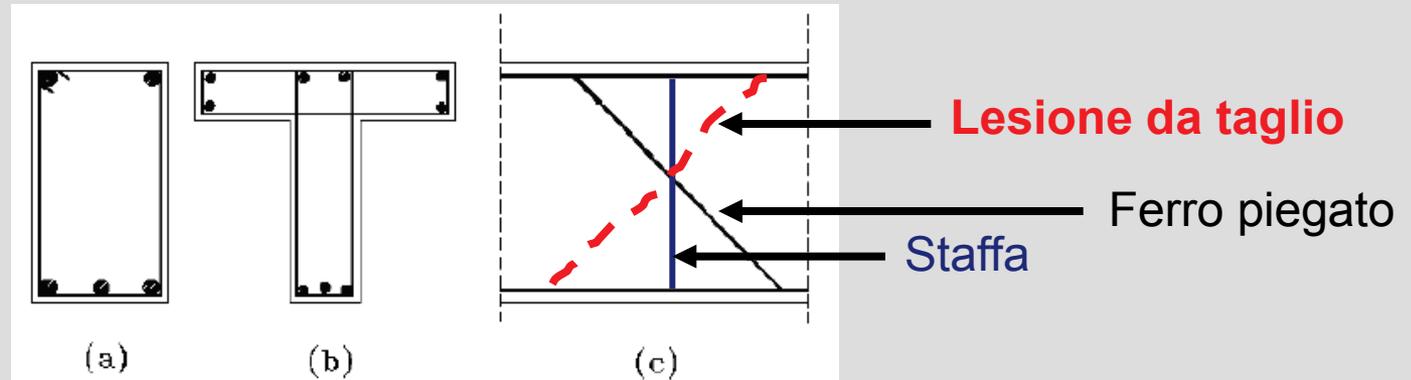
Comportamento ciclico  
in presenza di un  
elevato sforzo di taglio



Comportamento ciclico  
in presenza di un  
basso sforzo di taglio

# Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

Nel sopportare gli sforzi di taglio un ruolo fondamentale è svolto dalle armature trasversali, ed in particolare dalle **staffe**, che si oppongono efficacemente al progredire delle lesioni inclinate dovute al taglio



Il meccanismo resistente del taglio si estende ad un tratto di trave, pertanto non è possibile effettuare uno studio sezione per sezione.

# Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

---

## Parametri che influenzano il comportamento di un elemento in c.a. sottoposto a taglio

- Disposizione armature longitudinali
- Disposizione armature trasversali
- Aderenza acciaio-calcestruzzo
- Tipo e posizione dei carichi e dei vincoli
- Forma della sezione

# Il Taglio negli elementi in c.a.: I meccanismi di rottura

---

Il **tipo di rottura** dipende :

1. Dal valore assunto dal rapporto **(M / V h)** che commisura l'importanza del momento flettente M all'entità del taglio V per l'altezza h
2. Dalla **forma della sezione**

Per travi rettangolari esaminando numerose prove sperimentali sono stati individuati i seguenti campi di funzionamento:

- **(M / V h) < 1** comportamento arco-tirante tipico di travi corte con rottura caratterizzata da schiacciamento del cls nella zona tra l'appoggio e le prime lesioni all'intradosso;
- **1 ≤ (M / V h) ≤ 3** l'influenza del taglio predomina sull'azione del momento flettente: la rottura interviene in presenza di una manifesta fessurazione obliqua che si propaga da metà altezza della trave verso i bordi;
- **3 ≤ (M / V h) ≤ 7** il momento è predominante con lesioni che si innescano quasi verticalmente in corrispondenza del lembo teso per poi propagarsi verso l'alto;
- **(M / V h) > 7** l'influenza del taglio diventa praticamente trascurabile rispetto all'effetto del momento flettente.

# Il Taglio negli elementi in c.a.: I meccanismi di rottura

## Meccanismi di rottura

$$M / V h \leq 3$$

rottura per taglio

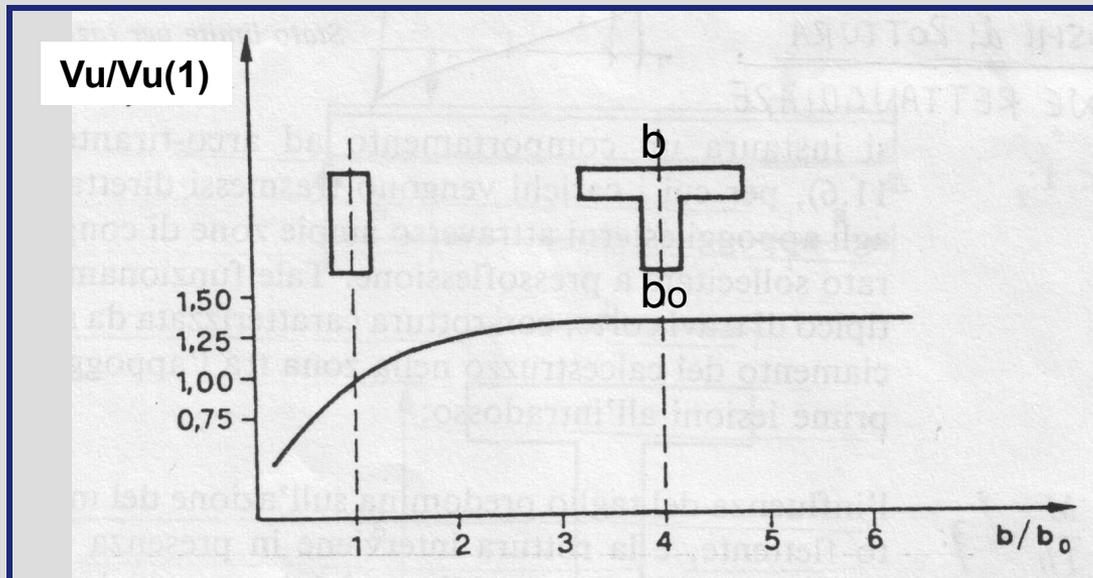
$$3 \leq (M / V h) \leq 7$$

rottura "mista"

$$(M / V h) > 7$$

rottura per flessione

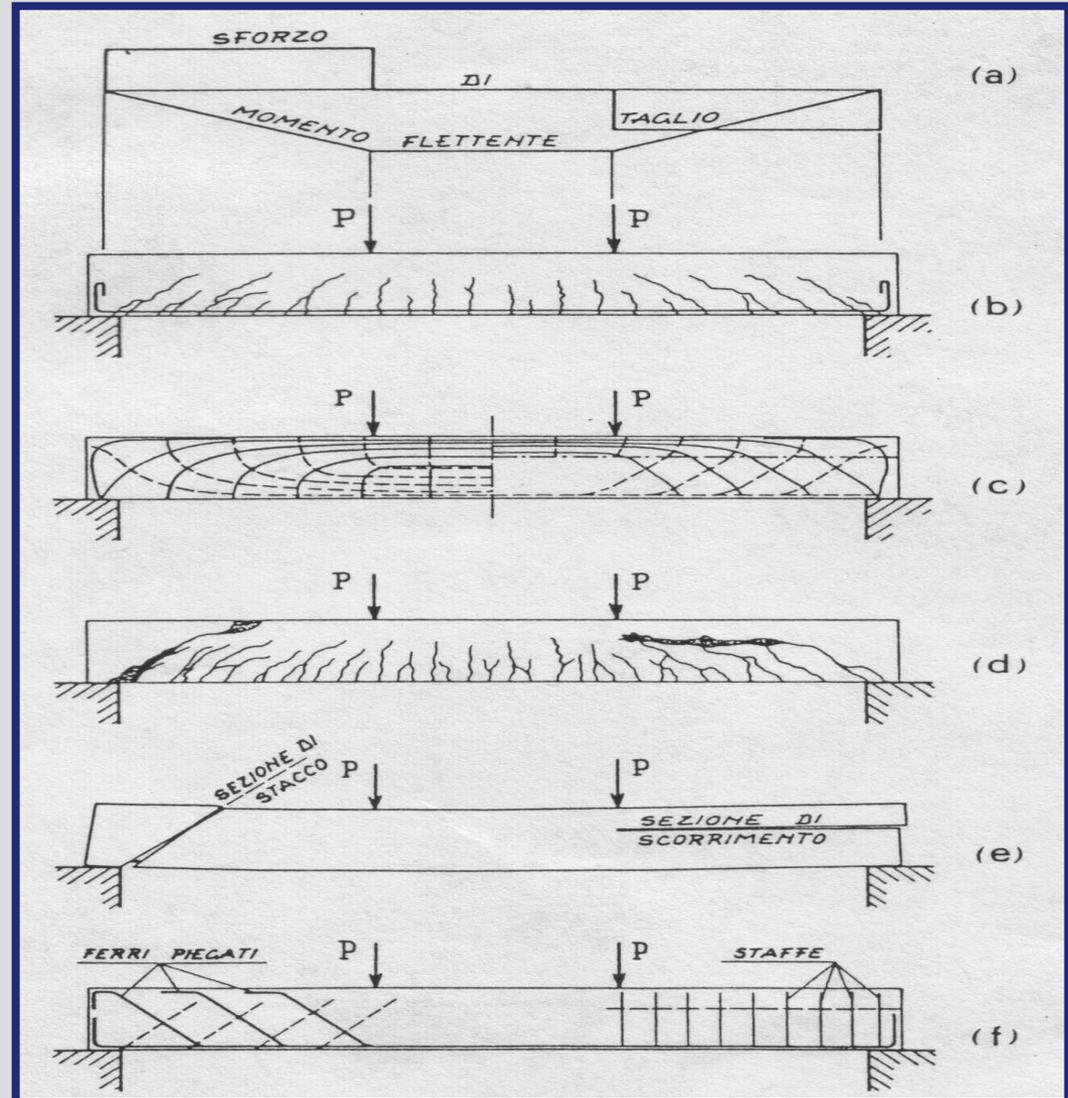
## Ruolo della forma della sezione



Dalla figura si osserva che l'andamento del taglio ultimo  $V_u$  tende ad un asintoto orizzontale per valori di  $b/b_0$  maggiori di 2

# Il Taglio negli elementi in c.a.: il comportamento sperimentale

- (a) Sollecitazioni agenti sulla trave
- (b) Possibile configurazione delle fessure estese a tutta la trave
- (c) Isostatiche di trazione (linee tratteggiate) e di compressione



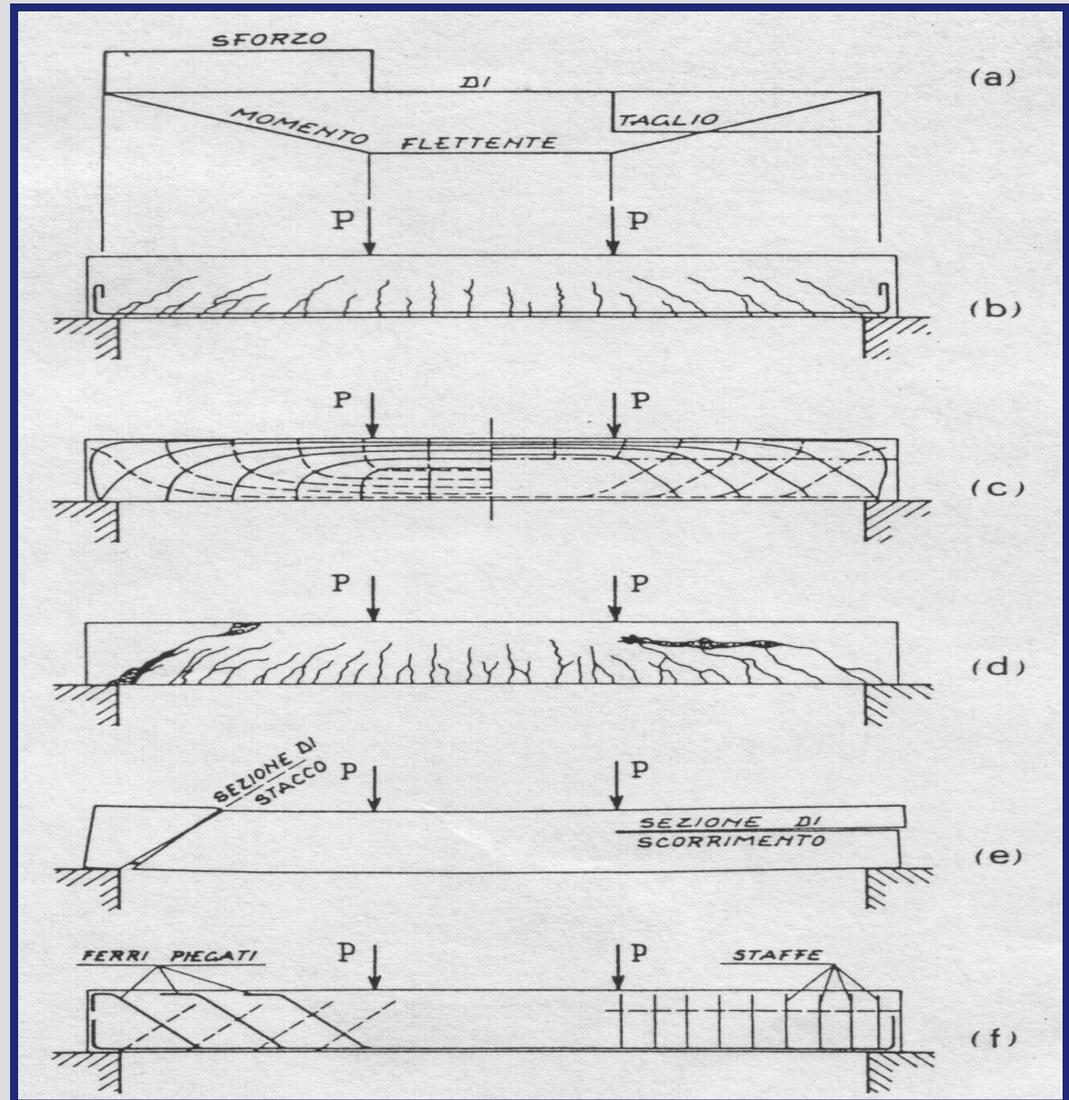
# Il Taglio negli elementi in c.a.: il comportamento sperimentale

(d) *Esempi di meccanismi di crisi:*

- a sinistra completo distacco secondo la giacitura a  $45^\circ$  delle fessure da taglio;
- a destra crisi per tranciamento dei conci d'anima al livello del loro incastro nel corrente compresso con scorrimento longitudinale di una parte della trave rispetto all'altra.

(e) Schematizzazione della sezione di scorrimento longitudinale e della "sezione di stacco" trasversale (meccanismi possibili, alternativi tra loro)

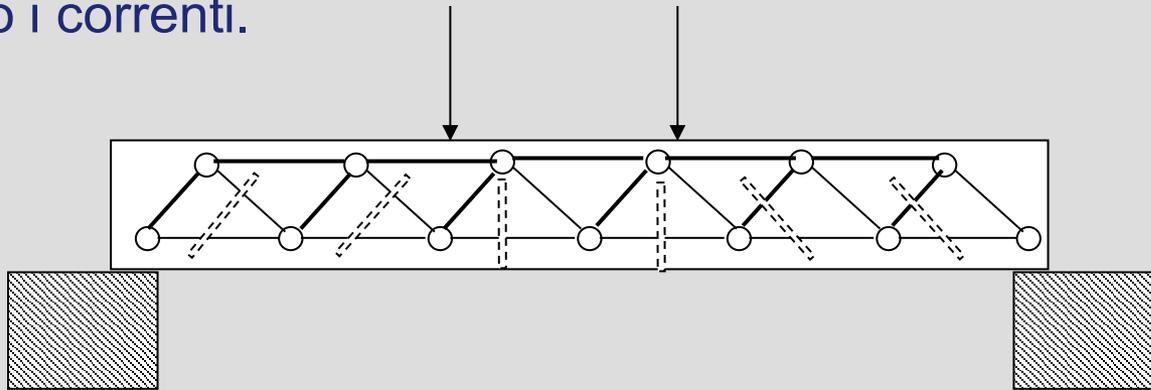
(f) Armatura a taglio: staffe e ferri piegati



# Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch

---

Il modello classico utilizzato per modellare (con buona accuratezza) il comportamento a taglio di un elemento in c.a. armato a taglio è il cosiddetto **traliccio di Mörsch**: struttura reticolare costituita da un corrente compresso ed uno teso e da un reticolo di aste di parete che collegano i correnti.



Gli elementi del traliccio di Mörsch sono delle bielle, ossia considerati vincolati agli estremi da cerniere e soggetti solo a sforzi assiali.

Le aste di parete sono inclinate di  $45^\circ$  e sono costituite da calcestruzzo compresso e dalle armature trasversali tese distribuite lungo la trave.

**In assenza di armature trasversali il traliccio sarebbe labile.**

## ELEMENTI NON ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

---

In diverse applicazioni (per esempio i solai) è possibile realizzare elementi privi di armatura a taglio, a patto che sussistano le condizioni contemplate dalla normativa che trovano fondamento nei risultati forniti da attività sperimentali.

In particolare, per via sperimentale si è dedotto che:

- anche elementi in c.a. privi di armature trasversali mostrano una resistenza a taglio non trascurabile, che deriva principalmente dalla resistenza a trazione del calcestruzzo, che nel caso “reale” è **piccola ma non nulla**;
- la presenza di fessure da flessione non annulla la resistenza a taglio in quanto esiste una serie di altri contributi resistenti di cui è opportuno tenere conto nella definizione di un modello più rispondente alla realtà.

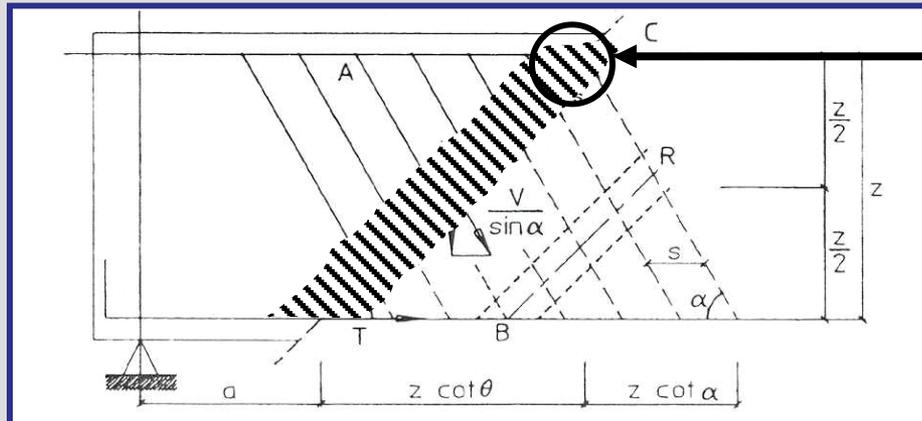
# ELEMENTI NON ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

## Bielle d'anima $V_a$

a) Un'aliquota  $V_a$  del taglio esterno viene portata dalle bielle di conglomerato compresso che si evidenziano tra due lesioni successive.

Tali bielle risultano in realtà incastrate e non incernierate (Ipotesi di Ritter-Morsch) nel corrente superiore, per cui assorbono una parte della forza verticale che sollecita l'armatura trasversale (effetto pettine).

Inoltre, è sperimentalmente dimostrato che le bielle hanno in genere una inclinazione minore di  $45^\circ$ , per cui si ha una ulteriore diminuzione delle tensioni nell'armatura trasversale.



bielle di cls  
compresso  
incastrate

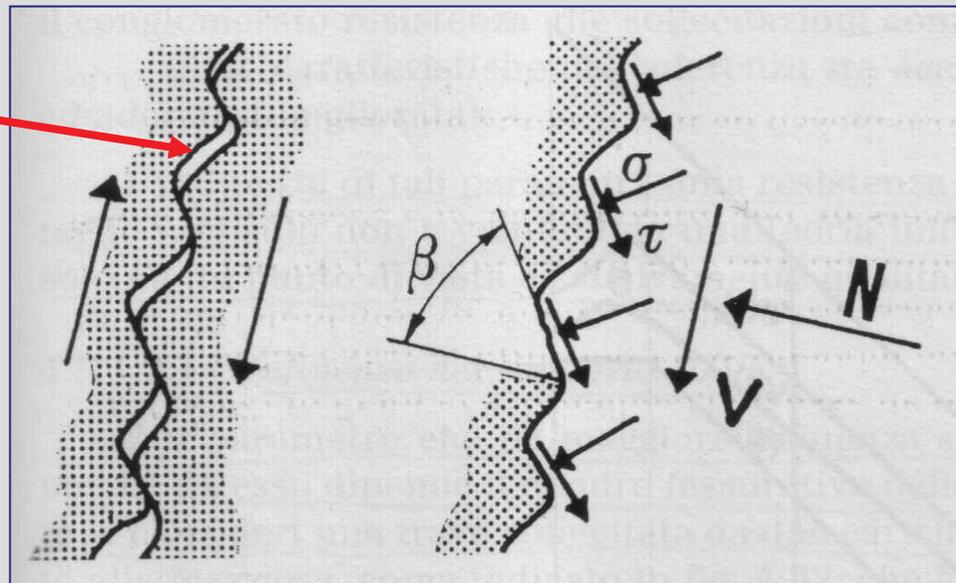
# ELEMENTI NON ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

## Ingranamento degli inerti (*aggregate interlock*) $V_b$

b) Una quota  $V_b$  del taglio esterno è portata per ingranamento degli inerti, ossia per effetto della forza che si trasmette attraverso le superfici a contatto di una lesione inclinata quando i due lembi opposti tendono ad avere uno scorrimento relativo.

E' un fenomeno di notevole rilevanza, specialmente in assenza di armature trasversali.

Lesione dovuta al taglio

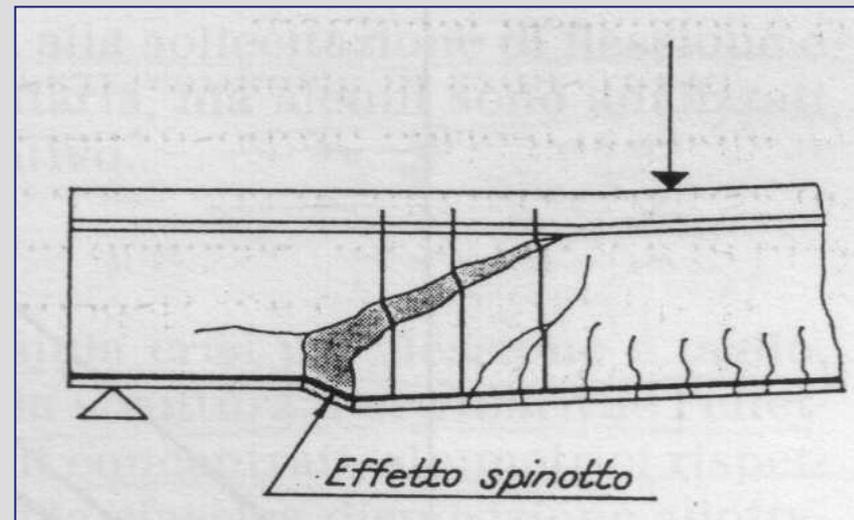


# ELEMENTI NON ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

## Effetto spinotto o bietta (dowel action) $V_c$

c) una ulteriore quota  $V_c$  del taglio esterno viene portata per "effetto spinotto" (*dowel action*) dalle barre longitudinali di acciaio, ossia mediante la resistenza a taglio offerta dalle barre che attraversano la fessura, quando si verifica uno scorrimento relativo tra le facce di quest'ultima. Tale contributo è funzione di numerosi fattori, tra i quali la rigidezza del calcestruzzo al di sotto delle barre e la distanza tra la sezione in esame e la staffa più vicina.

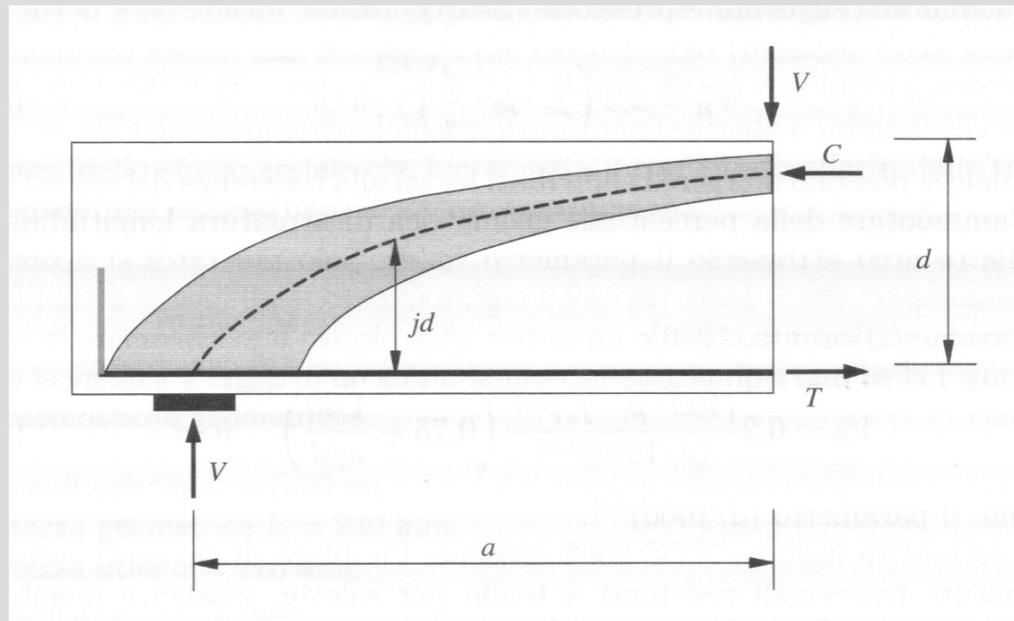
In genere esplica un contributo di piccola entità ed inoltre, innescando lesioni di distacco lungo l'armatura longitudinale, può incrementare l'apertura delle lesioni inclinate riducendo l'effetto portante per ingranamento degli inerti.



# ELEMENTI NON ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

## Effetto arco

- d) Il meccanismo ad arco consente di trasferire un'aliquota del taglio direttamente nella sezione di appoggio attraverso gli sforzi di compressione derivanti dalla formazione, entro l'altezza della sezione, di un arco resistente. Tale effetto è funzione delle dimensioni geometriche, ed in particolare aumenta al diminuire del rapporto tra la luce di taglio ( $a=M/V$ ) e l'altezza della sezione ( $d$ ).



# Stato Limite ultimo per sollecitazioni di Taglio. Le verifiche

## ELEMENTI SENZA ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO

Per elementi sprovvisti di armatura resistente a taglio (es. solai) la verifica allo SLU è soddisfatta se:

$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

dove  $V_{Ed}$  è il valore dello sforzo di taglio agente e  $V_{Rd}$  è il taglio resistente valutato secondo l'espressione:

$$V_{Rd} = \left\{ 0.18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0.15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d \geq (v_{\min} + 0.15 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d$$

$d$  è l'altezza utile della sezione

$b_w$  è la larghezza minima della sezione

$\rho_1 = A_{s1} / (b_w \cdot d)$  è il rapporto geometrico di armatura longitudinale

$\sigma_{cp} = N_{Ed} / A_c$  è la tensione media di compressione nella sezione

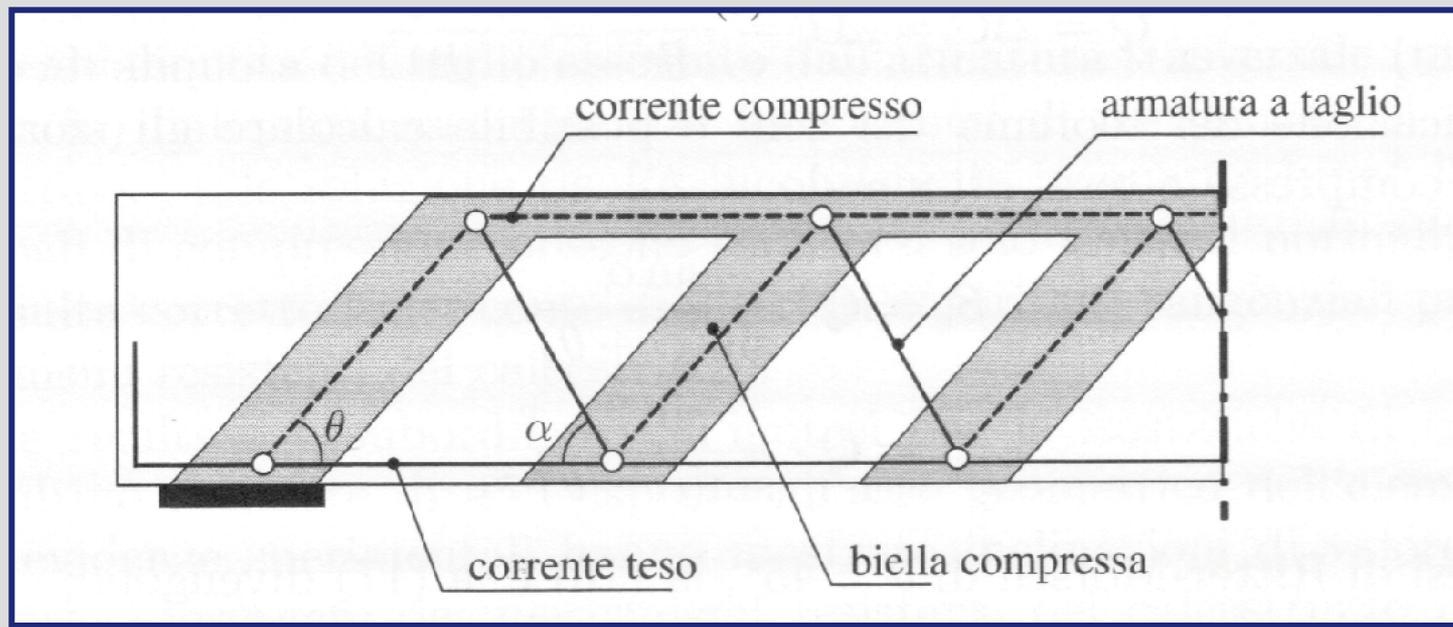
$$v_{\min} = 0.035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$$

$$k = 1 + (200 / d)^{1/2} \leq 2$$

# Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch

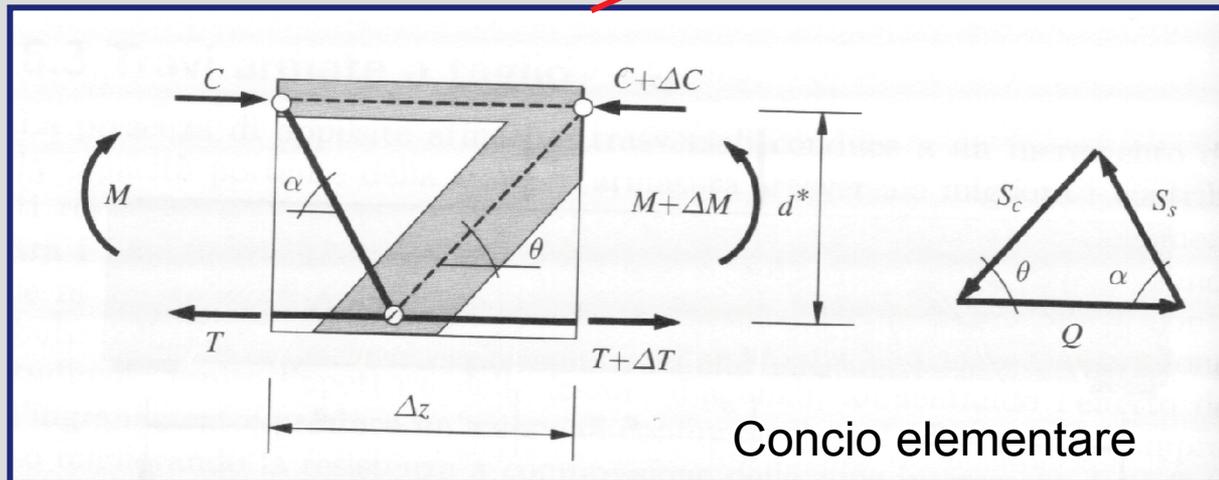
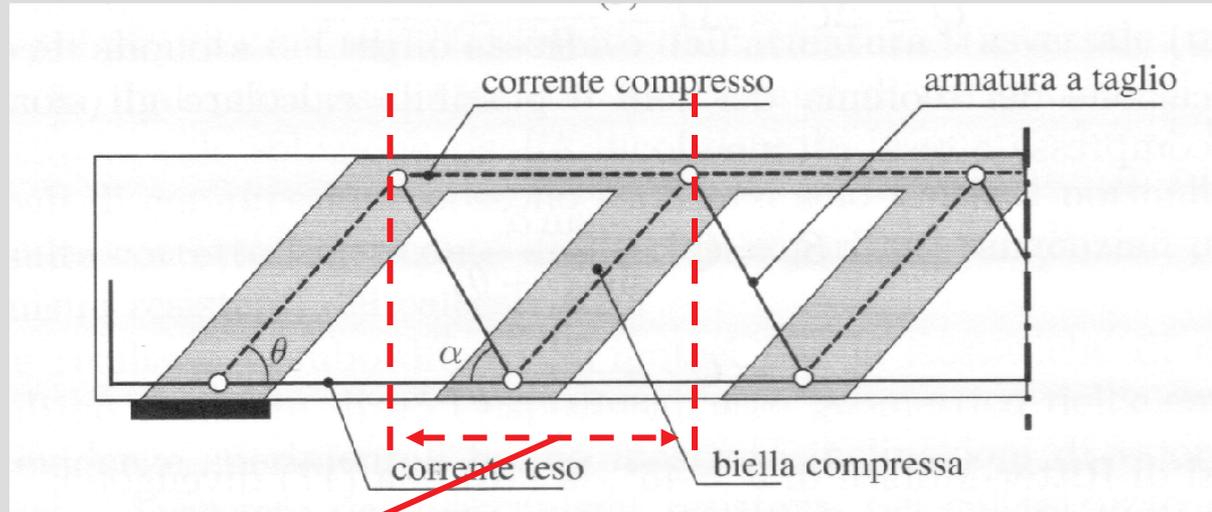
La trave è schematizzata con un **traliccio ideale** costituito da:

- bielle compresse inclinate di un angolo  $\theta$  ( $= 45^\circ$ )
- armature trasversali tese inclinate di un angolo  $\alpha$
- corrente superiore compresso
- corrente inferiore teso.



# Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch

## Calcolo degli sforzi agenti sulla biella compressa e le armature trasversali



Lo sforzo di scorrimento  $Q$  che si genera tra i correnti sup e inf è equilibrato da:

$S_s$  = sforzo assorbito dalla biella tesa

$S_c$  = sforzo assorbito dalla biella compressa

# Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch

Nel concio di lunghezza  $\Delta z$  lo sforzo di scorrimento in corrispondenza dell'asse neutro vale:

$$Q = (C + \Delta C) - C = (T + \Delta T) - T = \frac{\Delta M}{d^*} = \frac{V}{d^*} \Delta z \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{V}{d^*} \Delta z$$

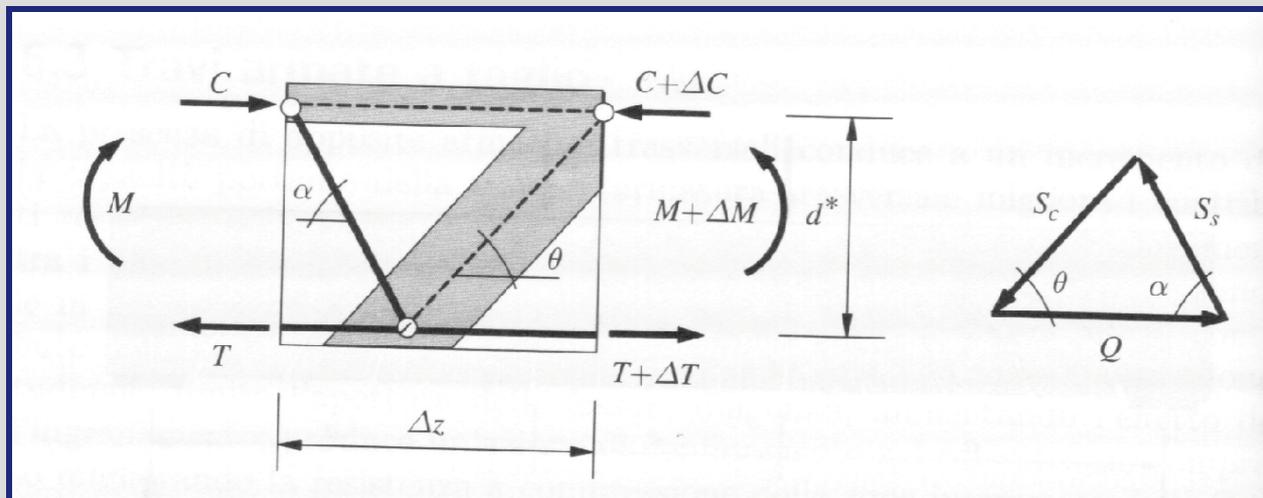
Applicando il *teorema dei seni* al poligono di forze **Q-S<sub>c</sub>-S<sub>s</sub>** si ha:

$$S_c = Q \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \Delta z}{d^*} \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

*Sforzo nella biella compressa*

$$S_s = Q \frac{\text{sen} \theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \Delta z}{d^*} \frac{\text{sen} \theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

*Sforzo nella biella tesa*



# Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch

$$S_c = Q \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

*Sforzo nella biella compressa*

$$S_s = Q \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

*Sforzo nella biella tesa*

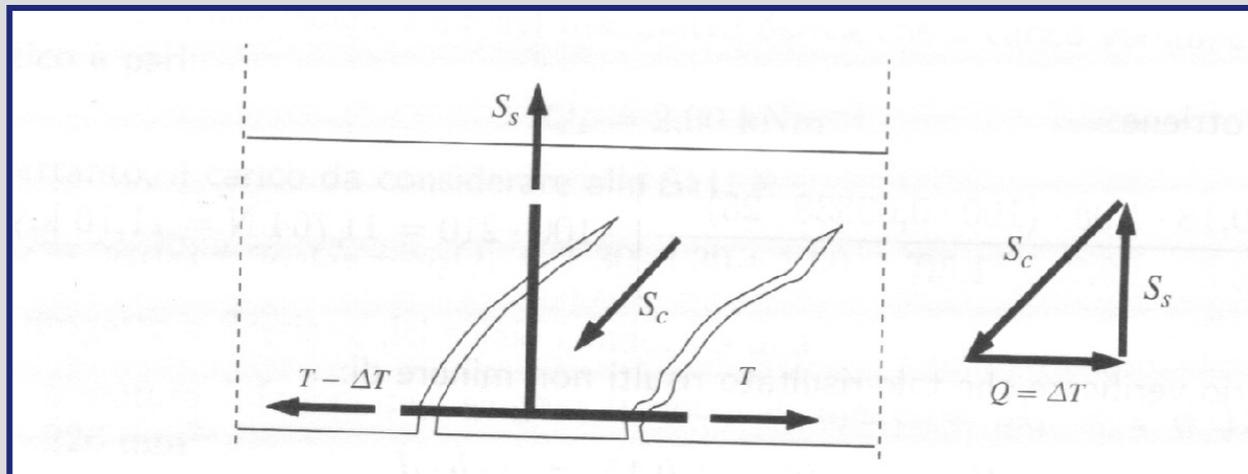
Le espressioni si particularizzano per  $\theta = 45^\circ$  (ipotesi del modello di Ritter-Mörsch) ed in presenza di staffe ( $\alpha = 90^\circ$ ):

$$S_c = \sqrt{2}Q$$

*Sforzo nella biella compressa*

$$S_s = Q$$

*Sforzo nella biella tesa*

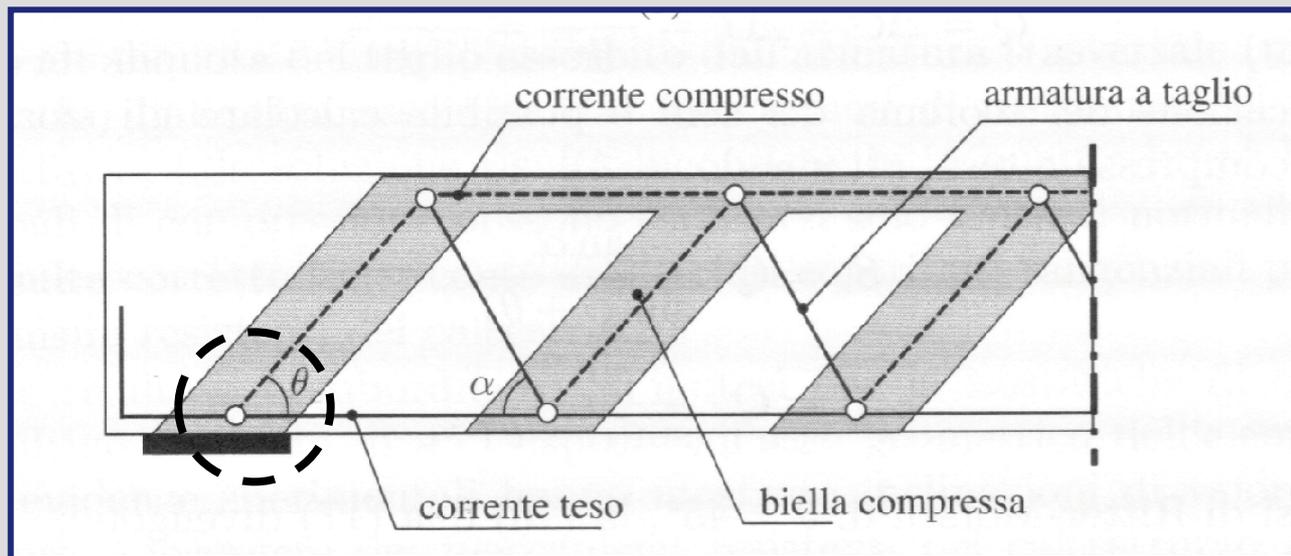


# Il modello a inclinazione variabile

La trave è schematizzata con un **traliccio in cui il valore dell'angolo  $\theta$  NON È COSTANTE** ma varia in funzione delle caratteristiche geometriche e resistenti della sezione.

Il modello di calcolo è analogo a quello di Ritter-Morsch, ossia:

- **bielle di cls compresse** inclinate di un angolo  $\theta$
- **bielle di acciaio tese** inclinate di un angolo  $\alpha$  (armature trasversali)
- **corrente superiore compresso** (cls delimitato dall'asse neutro)
- **corrente inferiore teso** (barre di acciaio longitudinali)



# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

---

## ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO

La verifica allo SLU per elementi con armatura trasversale resistente a taglio è soddisfatta se:

$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

dove:

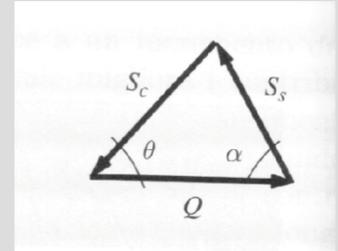
- $V_{Ed}$  è il valore dello sforzo di taglio agente
- $V_{Rd}$  è il taglio resistente pari al minimo tra il valore del taglio “compressione”  $V_{Rcd}$  (crisi della biella di cls) e taglio “trazione”  $V_{Rsd}$  (crisi della biella di armatura):

$$V_{Rd} = \min (V_{Rcd}; V_{Rsd})$$

# Il taglio “compressione”

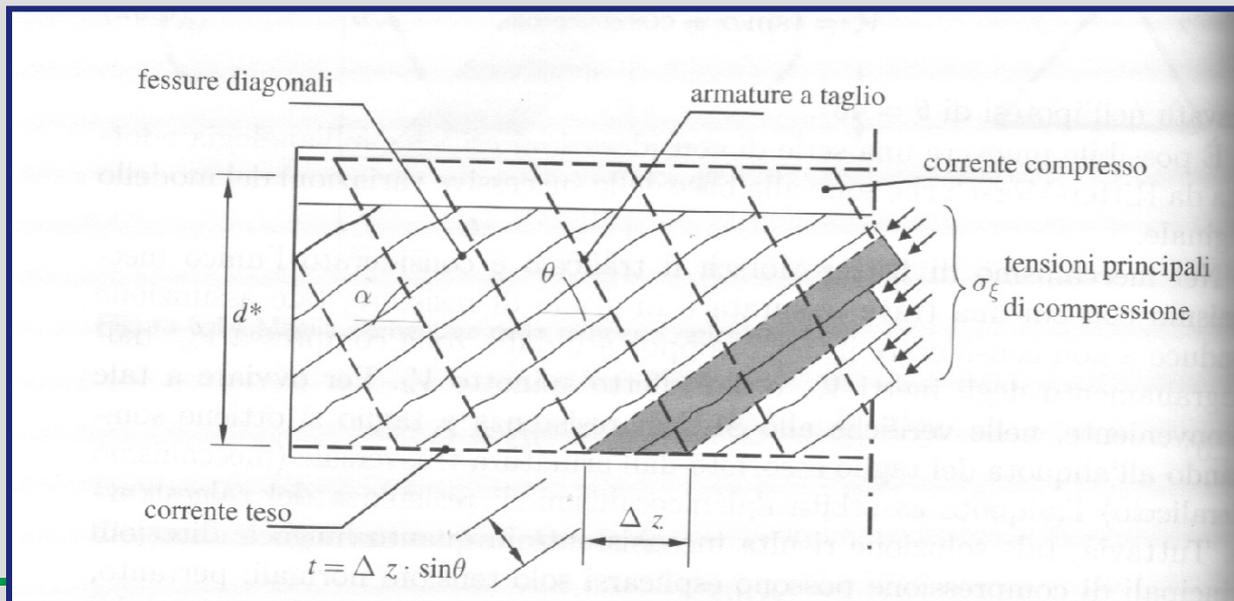
In analogia con quanto determinato per il modello di Ritter-Mörsch lo sforzo agente nella biella compressa è valutato attraverso:

$$S_c = Q \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \cdot \Delta z}{d^*} \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$



La crisi nella biella di cls è raggiunta quando lo sforzo  $S_c$  eguaglia (o supera) la resistenza della biella  $S_{cd}$ , valutata attraverso:

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \text{sen} \theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}$$



# Il taglio “compressione”

Nell'espressione di  $S_{cd}$  la simbologia utilizzata ha il seguente significato:

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \text{sen}\theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}$$

$v$  coefficiente che tiene conto della reale distribuzione delle tensioni, = 0.5 nelle NTC2008

$b$  larghezza minima della sezione;

$f_{cd}$  resistenza di calcolo a compressione del cls;

$\theta$  angolo di inclinazione delle bielle di cls, che nella NTC2008 deve rispettare la seguente limitazione:  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

$\alpha_c$  coefficiente maggiorativo che tiene conto della presenza/assenza dello sforzo normale. Nella NTC2008 è assunto pari a:

$1$  *per membrature non compresse*

$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$   $0 \leq \sigma_{cp} < 0.25f_{cd}$

$1,25$   $0.25f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0.5f_{cd}$

$2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$   $0.5f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

$\sigma_{cp}$  tensione media di compressione della sezione.

# Il taglio “compressione”

Il valore del taglio “compressione” (crisi lato cls compresso: taglio resistente  $V_{Rcd}$ ) si ottiene eguagliando lo sforzo agente nel puntone  $S_c$  con quello resistente  $S_{cd}$ :

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \text{sen}\theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd} = S_c = Q \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \cdot \Delta z}{d^*} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

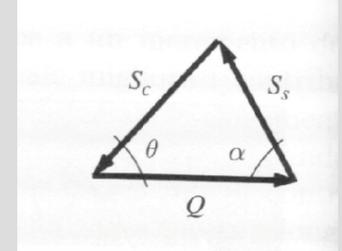
$$V_{Rcd} = b \cdot d^* \cdot v \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

**Taglio “compressione” resistente**

# Il taglio “trazione”

In analogia con quanto determinato per il modello di Ritter-Mörsch lo sforzo agente nella biella tesa è valutato attraverso:

$$S_s = Q \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)}$$



La crisi nelle bielle di acciaio è raggiunta quando lo sforzo  $S_s$  eguaglia (o supera) la resistenza della biella tesa, valutata attraverso:

$$S_{sd} = \frac{A_{sw} \cdot \Delta z}{s} f_{yd}$$

$A_{sw}$  area della singola armatura trasversale (nel caso di staffe è uguale all'area della singola barra per il numero di braccia);

$s$  distanza tra due armature trasversali consecutive (passo)

$f_{yd}$  tensione di snervamento di calcolo dell'acciaio

# Il taglio “trazione”

Il valore del taglio “trazione” (crisi lato acciaio teso: taglio resistente  $V_{Rsd}$ ) si ottiene eguagliando lo sforzo agente nella biella tesa  $S_s$  con quello resistente  $S_{sd}$ :

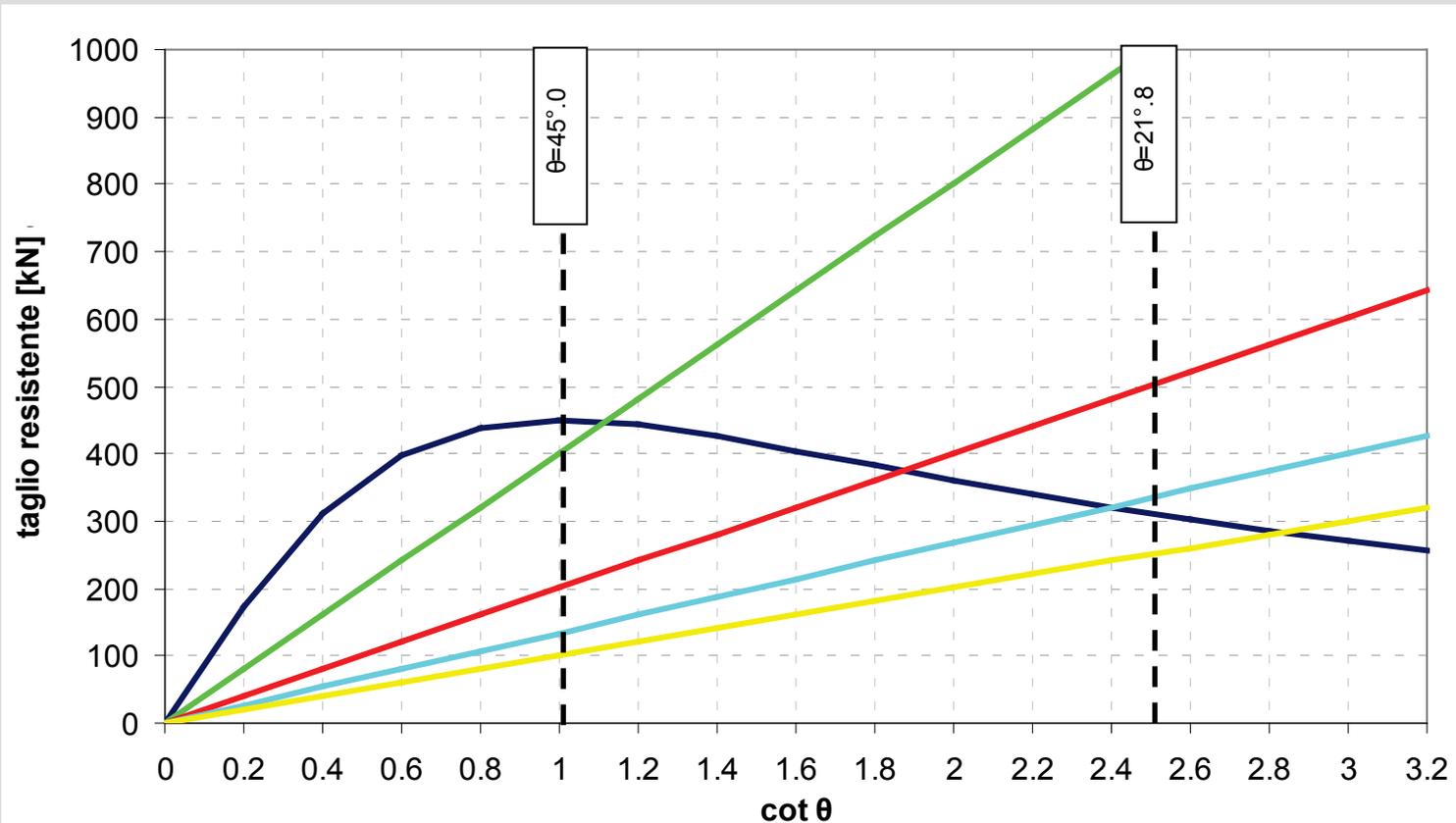
$$S_s = Q \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = S_{sd} = \frac{A_{sw} \cdot \Delta z}{s} f_{yd}$$

$$V_{Rsd} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{d^*}{s} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\cot\alpha + \cot\theta)$$

*Taglio “trazione” resistente*

# Il taglio “trazione” – “compressione”

Funzioni del taglio resistente “compressione” – “trazione”  
(il taglio resistente  $V_{Rsd}$  è calcolato ipotizzando l'utilizzo di staffe ( $\alpha = 90^\circ$ ))



—  $V_{rcd}$  (300 x 600mm)

—  $V_{rsd}$  (Asw = 100mmq, s = 70mm)

—  $V_{rsd}$  (Asw = 100mmq, s = 100mm)

—  $V_{rsd}$  (Asw = 100mmq, s = 150mm)

—  $V_{rsd}$  (Asw = 100mmq, s = 200mm)

## Il taglio “compressione” - “trazione”

In una sezione in c.a. con armatura a taglio la crisi contemporanea del cls e dell'acciaio avviene in corrispondenza di un valore dell'angolo  $\theta$  valutato attraverso l'uguaglianza tra il taglio “compressione”  $V_{Rcd}$  e il taglio “trazione”  $V_{Rsd}$

$$V_{Rsd} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{d^*}{s} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) = V_{Rcd} = b \cdot d^* \cdot v \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

$$\cot \theta = \sqrt{\frac{s \cdot b \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \text{sen} \alpha} - 1}$$

La norma NTC2008 impone che il valore di  $\cot \theta$  deve rispettare la seguente limitazione:  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

**ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO** (§ 4.1.2.1.3, NTC2008)

## Taglio “compressione”

La resistenza delle bielle compresse di CLS si valuta attraverso la seguente espressione:

$$V_{Rcd} = 0.9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_C \cdot f'_{cd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) / (1 + \cot^2 \theta)$$

$b_w$  è la larghezza minima della sezione;

$d$  è l'altezza utile della sezione;

$\sigma_{cp}$  è la tensione media di compressione della sezione;

$\alpha$  angolo di inclinazione dell'armatura trasversale rispetto all'asse della trave;

$f'_{cd}$  resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ( $f'_{cd} = 0,5 \times f_{cd}$ );

$\theta$  angolo di inclinazione delle bielle di cls  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

$\alpha_C$  coefficiente maggiorativo pari a:

1	per membrature non compresse
$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$	$0 \leq \sigma_{cp} < 0.25f_{cd}$
1,25	$0.25f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0.5f_{cd}$
$2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$	$0.5f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

**ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO** (§ 4.1.2.1.3, NTC2008)

## Taglio “trazione”

La resistenza delle armature trasversali si valuta attraverso la seguente espressione:

$$V_{Rsd} = 0.9 \cdot d \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{yd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \text{sen} \alpha$$

- $A_{sw}$  area dell'armatura trasversale;  
 $d$  altezza utile della sezione;  
 $s$  interasse tra due armature trasversali consecutive;  
 $\alpha$  angolo di inclinazione dell'armatura trasversale rispetto all'asse della trave;  
 $f_{yd}$  resistenza di calcolo dell'acciaio;  
 $\theta$  angolo di inclinazione delle bielle di cls  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

---

*ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO* (§ 4.1.2.1.3, NTC2008)

La verifica allo SLU per elementi con armature trasversale resistente a taglio è soddisfatta se:

$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

dove:

- $V_{Ed}$  è il valore dello sforzo di taglio agente
- $V_{Rd}$  è il taglio resistente pari al minimo tra il valore del taglio “compressione”  $V_{Rcd}$  (puntone di CLS) e taglio “trazione”  $V_{Rsd}$  (biella di armatura tesa):

$$V_{Rd} = \min (V_{Rcd}; V_{Rsd})$$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

---

La valutazione del taglio resistente di una sezione in c.a. armata a taglio prevede:

## 1) determinazione della cotangente dell'angolo di inclinazione $\theta$ delle bielle compresse

Tale operazione si effettua uguagliando il taglio “trazione” e il taglio “compressione”

$$V_{Rcd} = V_{Rsd} \Rightarrow \cot \theta = \sqrt{\frac{s \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin \alpha} - 1}$$

## 2) controllo del rispetto del limite di normativa e determinazione del taglio resistente $V_{Rd}$

Bisogna controllare che il valore di  $\cot \theta$  rientri nei limiti previsti dalla norma NTC2008:  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

---

In funzione del valore calcolato di  $\cot\theta$ , il valore del taglio resistente  $V_{Rd}$  è valutato attraverso:

caso a):  $1 \leq \cot\theta \leq 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = V_{Rcd}(\cot\theta) = V_{Rsd}(\cot\theta)$

*crisi contemporanea CLS e armatura*

caso b):  $\cot\theta > 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|\cot\theta=2.5}; V_{Rcd|\cot\theta=2.5}) = V_{Rsd}(\cot\theta = 2.5)$

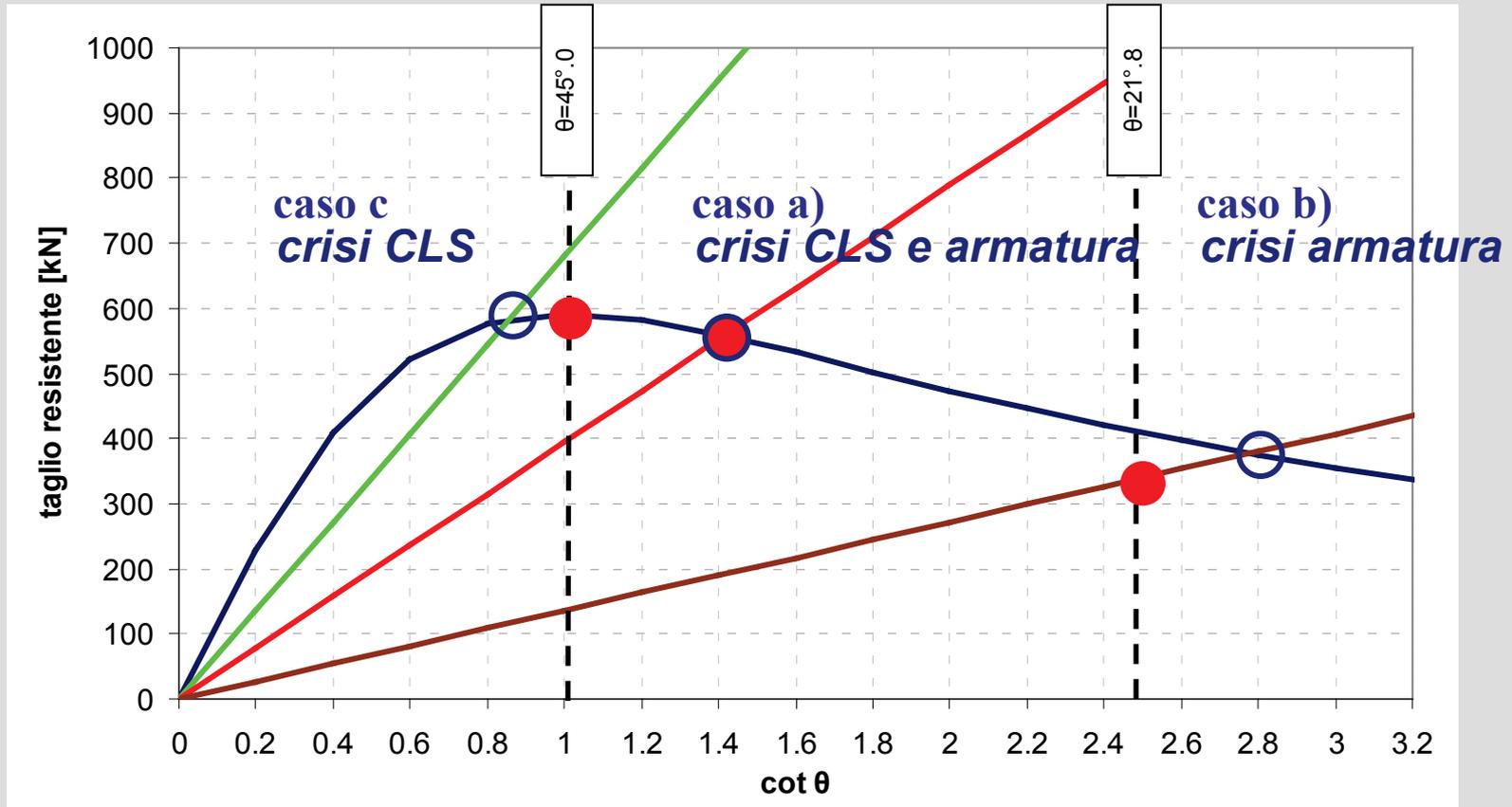
*crisi armatura*

caso c):  $\cot\theta < 1 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|\cot\theta=1.0}; V_{Rcd|\cot\theta=1.0}) = V_{Rcd}(\cot\theta = 1.0)$

*crisi calcestruzzo*

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{s \cdot b \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \text{sen}\alpha} - 1}$$

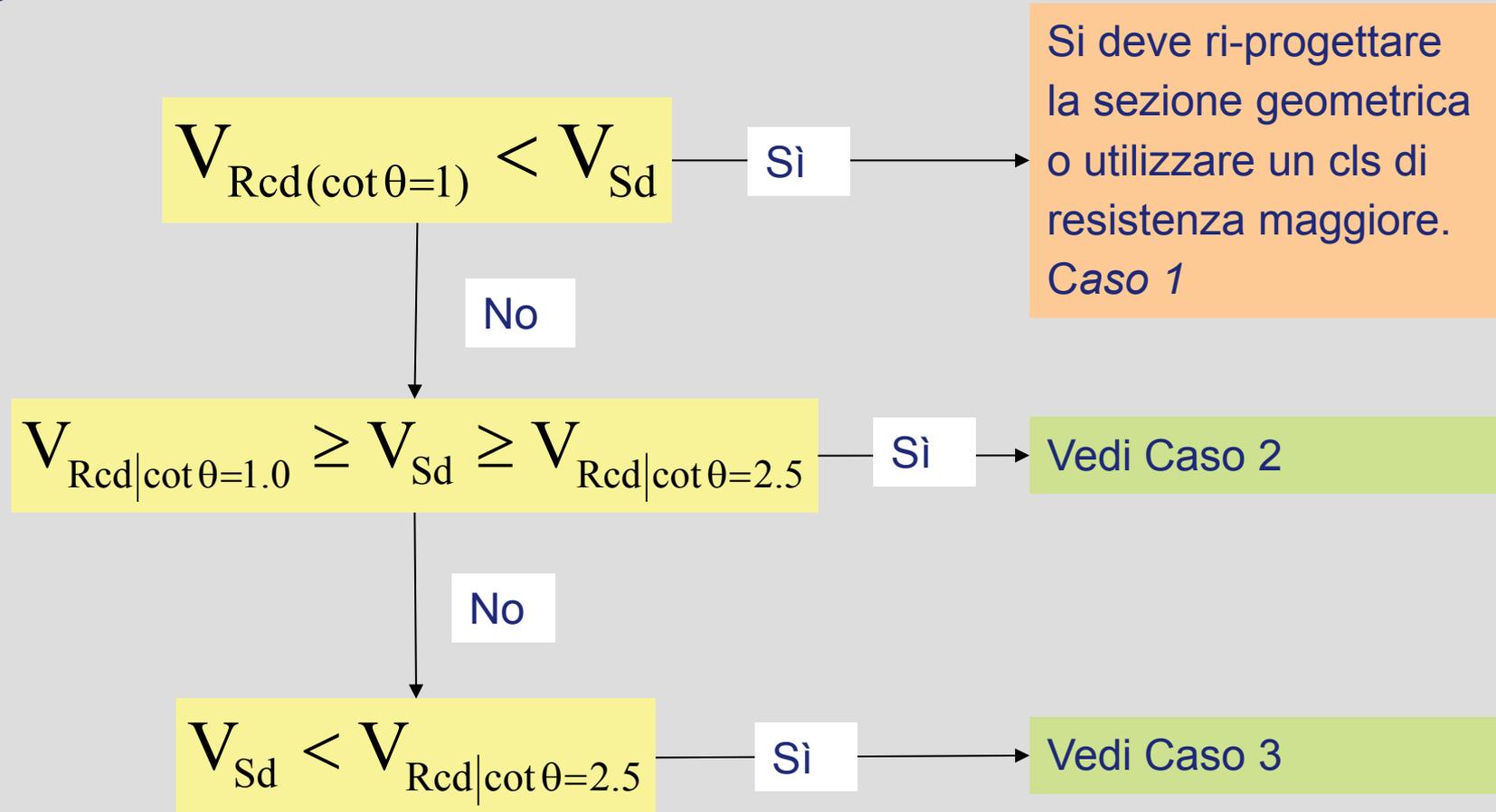
# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo



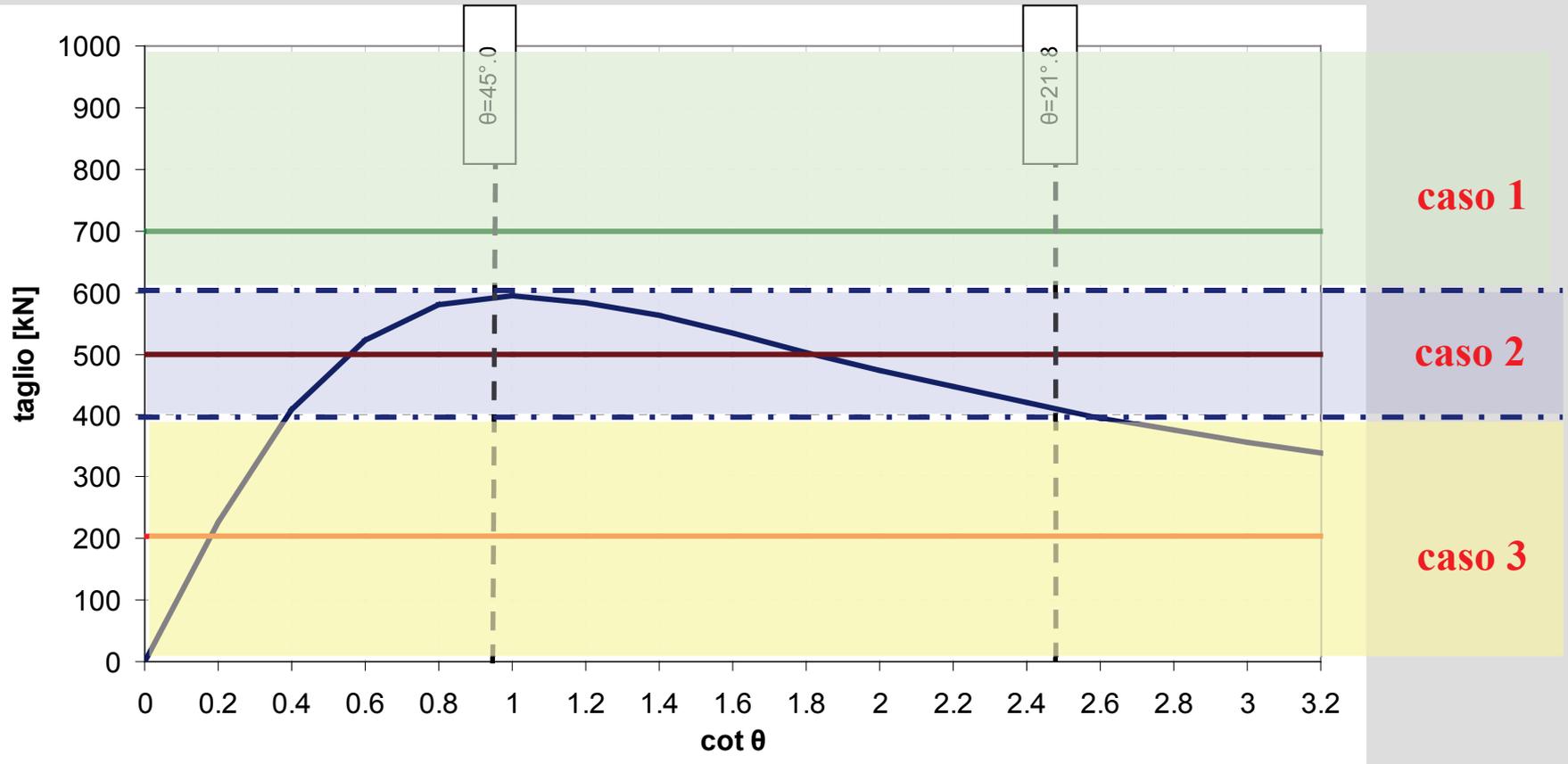
- Funzione taglio “compressione”,  $V_{Rcd}$
- Funzioni taglio resistente “trazione”,  $V_{Rsd}$  (al variare di  $A_{sw}/s$ )

# Il Progetto delle armature

Per la **progettazione delle armature a taglio** si procede secondo il seguente schema:



# Il Progetto delle armature



- Funzione taglio “compressione”,  $V_{red}$
- Valori di Taglio agente  $V_{sd}$

# Il Progetto delle armature

---

Caso 2:

$$V_{Rcd|cot\theta=1.0} \geq V_{Sd} \geq V_{Rcd|cot\theta=2.5}$$

Il valore della  $\cot\theta$  è valutato attraverso l'uguaglianza tra il taglio agente  $V_{Sd}$  e quello resistente del cls  $V_{Rcd}$  (taglio "compressione") :

$$V_{Rcd} = V_{Sd} \Rightarrow \cot\theta = f(V_{Sd}, d, b_w, \alpha_C, f'_{cd}, \cot\alpha)$$

Noto il valore di  $\cot\theta$  l'armatura a taglio è determinata attraverso l'uguaglianza tra il taglio agente  $V_{Sd}$  e quello resistente "trazione"  $V_{Rsd}$ , dove l'unica incognita è il rapporto  $A_{sw}/s$ .

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) \cdot \sin\alpha}$$

$A_{sw}$  area dell'armatura trasversale  
 $s$  interasse tra due armature trasversali consecutive

# Il Progetto delle armature

Caso 3:  $V_{Sd} < V_{Rcd|cot\theta=2.5}$

Il progetto dell'armatura a taglio (rapporto  $A_{sw}/s$ ) viene eseguito imponendo l'uguaglianza tra il taglio agente  $V_{Sd}$  e quello resistente dell'armatura  $V_{Rsd}$  (taglio "trazione") in corrispondenza di  $cot\theta = 2.5$  :

$$V_{Sd} = V_{Rsd|cot\theta=2.5} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{0.9d}{s} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\cot\alpha + 2.5)$$



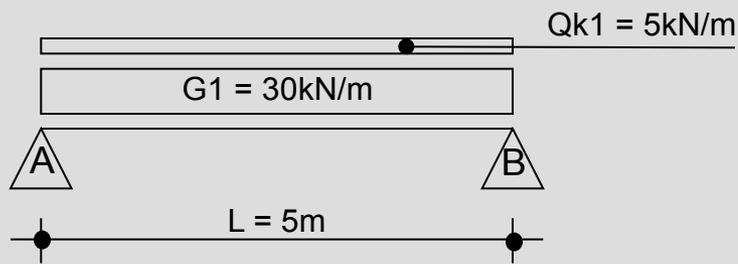
$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\cot\alpha + 2.5) \cdot \text{sen}\alpha}$$

$A_{sw}$  area dell'armatura trasversale

$s$  interasse tra due armature trasversali consecutive

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2008)

## Esempio di VERIFICA a taglio (SLU)



### Combinazione di calcolo delle azioni

$$\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1} = 1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5 = 46.5 \text{ kN/m}$$

### Analisi delle sollecitazioni

$$V_{sd}(A, B) = (\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1}) \cdot L / 2 = (1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5) \cdot 5 / 2 = 116.25 \text{ kN}$$

### Resistenze di calcolo

$$\text{cls: } f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_C = 0.85 \cdot 20 / 1.5 = 11.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{acciaio: } f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S = 450 / 1.15 = 391.3 \text{ N/mm}^2$$

### *Dati del problema:*

*sezione trave: rettangolare b=300mm;  
H=500mm*

*classe di resistenza cls: C20/25  
(fck=20N/mm<sup>2</sup>)*

*tipo armatura resistente a taglio: staffe  
verticali ( $\alpha=90^\circ$ )*

*area staffe: Ø8 passo (s) 20cm a due braccia  
(Asw=2 x 50mm<sup>2</sup>=100mm<sup>2</sup>)*

*acciaio per c.a.: B450C (fyk=450N/mm<sup>2</sup>)*

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2008)

determinazione della cotangente dell'angolo di inclinazione  $\theta$  delle bielle compresse

$$V_{Rcd} = V_{Rsd} \Rightarrow \cot^2 \theta = \frac{s \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \text{sen} \alpha} - 1 \Rightarrow \cot \theta = 3.10$$

controllo del rispetto del limite di normativa e determinazione del taglio resistente  $V_{Rd}$

caso a):  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = V_{Rcd} = V_{Rsd}$

caso b):  $\cot \theta > 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|_{\cot \theta=2.5}}; V_{Rcd|_{\cot \theta=2.5}})$

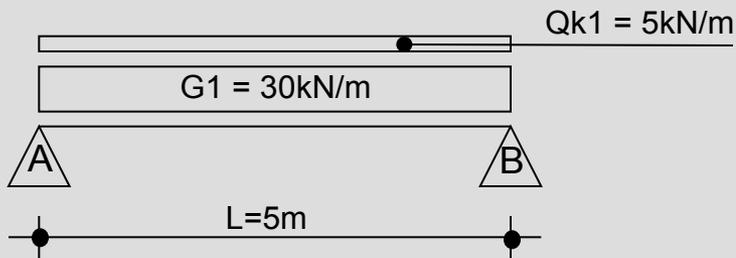
caso c):  $\cot \theta < 1 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|_{\cot \theta=1.0}}; V_{Rcd|_{\cot \theta=1.0}})$

$\cot \theta = 3.03 > 2.5 \Rightarrow \text{caso 2}$

$V_{Rd} = V_{Rsd|_{\cot \theta=2.5}} = 207.96 \text{ kN} > 116.25 \text{ kN} = V_{Sd} \Rightarrow \text{VERIFICATO}$

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2008)

## Esempio di PROGETTO a taglio (SLU)



### *Dati del problema:*

*sezione trave: rettangolare  $b=300\text{mm}$ ;  
 $H=500\text{mm}$*

*classe di resistenza cls: C20/25  
( $f_{ck}=20\text{N/mm}^2$ )*

*tipo armatura resistente a taglio: staffe  
verticali*

*acciaio per c.a.: B450C ( $f_{yk}=450\text{N/mm}^2$ )*

### Combinazione di calcolo delle azioni

$$\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1} = 1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5 = 46.5 \text{ kN/m}$$

### Analisi delle sollecitazioni

$$V_{sd}(A, B) = (\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1}) \cdot L / 2 = (1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5) \cdot 5 / 2 = 116.25 \text{ kN}$$

### Resistenze di calcolo

cls:  $f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_C = 0.85 \cdot 20 / 1.5 = 11.3 \text{ N/mm}^2$

acciaio:  $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S = 450 / 1.15 = 391.3 \text{ N/mm}^2$

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2008)

## controllo del caso di calcolo

### Caso 1

$$V_{Rcd|cot\theta=1} > V_{Sd} \Rightarrow 0.9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_C \cdot f'_{cd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) / (1 + \cot^2\theta) = 371.18 > 116.25 \text{ kN} = V_{Sd}$$

### Caso 2

$$V_{Rcd|cot\theta=1.0} \geq V_{Sd} \geq V_{Rcd|cot\theta=2.5} \Rightarrow V_{Rcd|cot\theta=1.0} = 371.18, V_{Rcd|cot\theta=2.5} = 207.96 > V_{Sd} = 116.30 \text{ kN}$$

### Caso 3

$$V_{Sd} < V_{Rcd|cot\theta=2.5} \Rightarrow V_{Sd} = 116.25 < 207.96 \text{ kN} = V_{Rcd|cot\theta=2.5}$$

## Determinazione dell'armatura trasversale per il caso 3

$$V_{Sd} = V_{Rsd|cot\theta=2.5} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{0.9d}{s} \cdot 2.5 \Rightarrow \frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot 2.5}$$

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2008)

dimensionamento dell'armatura trasversale (ipotesi: staffe  $\varnothing 8$  a due braccia  
( $A_{sw} = 2 \times 50\text{mm}^2 = 100\text{mm}^2$ ))

$$\frac{A_{sw}}{s} = 0.28 \Rightarrow s = \frac{A_{sw}}{0.28} = 357\text{mm}$$

minimo da regolamento (§4.1.6 NTC08)

Area staffe minima:

$$A_{sw} = 1.5 \times b_w = 1.5 \times 300 = 450\text{mm}^2/\text{m}$$

Minimo 3 staffe per metro

Passo staffa massimo  $0.8 \times d =$

→  $s = 220\text{mm}$

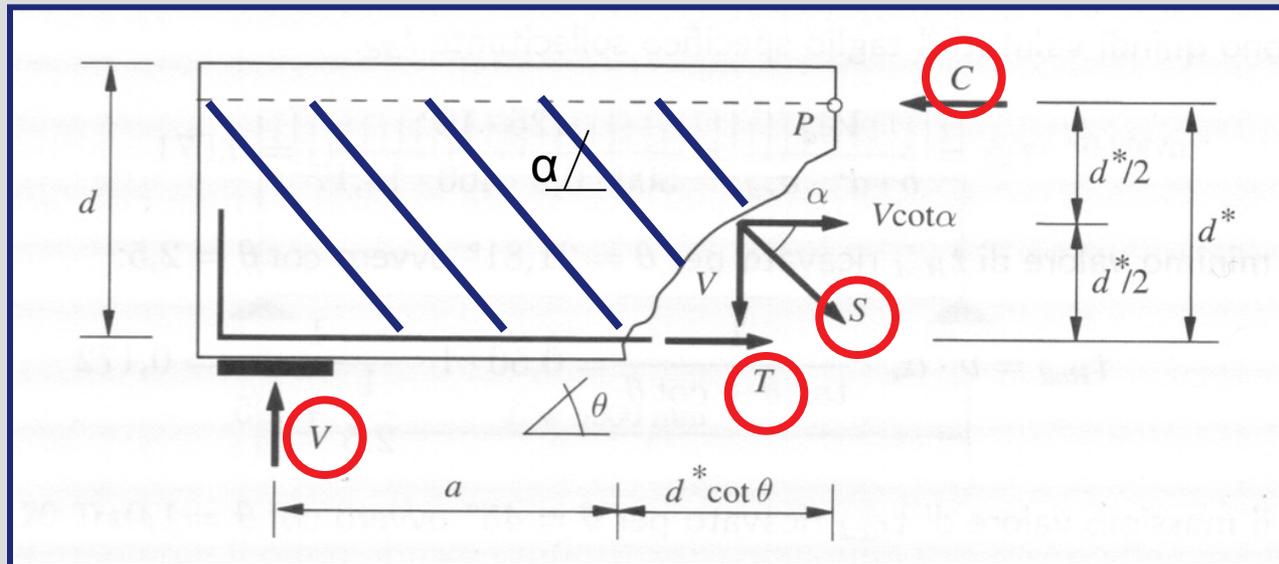
→  $s = 330\text{mm}$

→  $s = 416\text{mm}$

$S_{min} =$   
**220mm**

# La traslazione del momento flettente

La formazione delle fessure diagonali a taglio comporta un aggravio della tensione nell'armatura tesa (rispetto a quella che si otterrebbe considerando la sola flessione).



Equilibrio alla rotazione intorno al punto P:

$$T \cdot d^* - V(a + d^* \cot \theta) + V \cdot \frac{d^*}{2} \cdot \cot \theta + V \cot \alpha \frac{d^*}{2} = 0$$

da cui:

$$T = \frac{V}{d^*} \left[ a + \frac{d^*}{2} (\cot \theta - \cot \alpha) \right] = \frac{|M|}{d^*} + \frac{|V|}{2} (\cot \theta - \cot \alpha)$$

# La traslazione del momento flettente

---

A causa delle lesioni diagonali a taglio lo sforzo nell'armatura longitudinale tesa all'ascissa  $z = a$  dall'appoggio è prodotto dal momento flettente che si verifica nella sezione di ascissa:

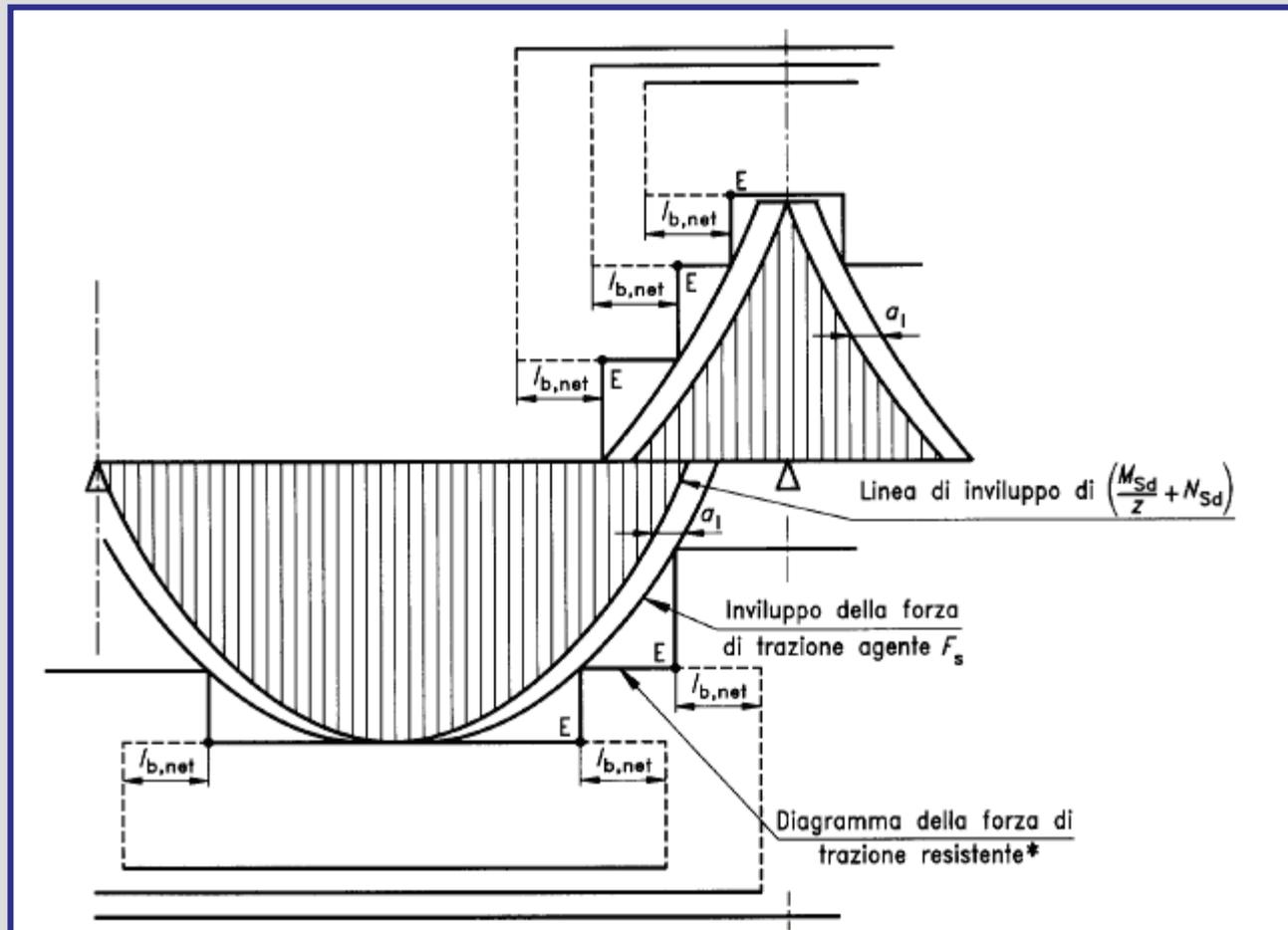
$$z = a + d^*/2(\cot\theta - \cot\alpha)$$

Operativamente questo comporta che la verifica dell'armatura longitudinale tesa debba essere effettuata traslando il diagramma del momento di calcolo per lo stato limite ultimo della quantità:

$$d^*/2(\cot\theta - \cot\alpha)$$

# La traslazione del momento flettente

Esempio di diagramma del momento flettente le cui ordinate sono traslate lungo l'asse della trave nel verso tale da estendere l'area del diagramma delle sollecitazioni.



# La traslazione del momento flettente

Nella sezione di appoggio ( $a = 0$ ) di un elemento armato con sole staffe ( $\cot \alpha = 0$ ) risulta:

$$T = \frac{V}{d^*} \left[ a + \frac{d^*}{2} (\cot \theta - \cot \alpha) \right] \rightarrow T = \frac{V}{2} \cdot \cot \theta$$

L'area di armatura inferiore risulta pertanto pari a:

$$A_s = \frac{T}{f_{yd}} = \frac{V \cot \theta}{2 f_{yd}}$$

Nella sezione di appoggio ( $a = 0$ ) di un elemento non armato a taglio ( $S = 0$ ,  $V \cos \alpha = 0$ ) per l'equilibrio del concio si ha:

$$T \cdot d^* - V \cdot d^* \cot \theta = 0 \rightarrow T = V \cdot \cot \theta$$

L'area di armatura inferiore risulta pertanto pari a:

$$A_s = \frac{T}{f_{yd}} = \frac{V \cot \theta}{f_{yd}}$$